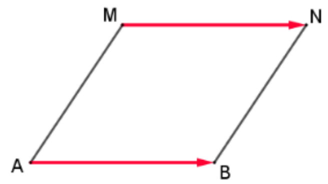
Chapitre 3 – Vecteurs, droites et plans de l’espace

1. Vecteurs, droites et plans

1a. Vecteurs de l’espace

Définition : soient A et B deux points de l’espace.
La transformation qui à tout point M associe l’unique point N tel que $ABNM$ soit un parallélogramme s’appelle la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Comme dans le plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux : on dit que ce sont les représentants d’un vecteur unique, qu’on peut noter $\vec{u}$.



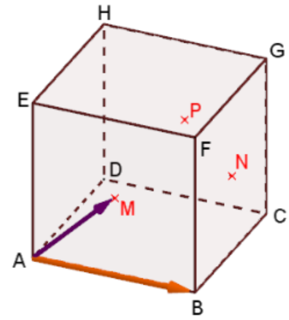
On peut faire les mêmes opérations sur les vecteurs que dans le plan : addition, multiplication par un réel…
La **relation de Chasles** est toujours vérifiée : pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ et tout point M, on a :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}}$$

On peut aussi utiliser la **distributivité** : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel k :

$$\boldsymbol{k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}}$$

Exemple : dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre,
les points M, N et P sont les centres respectifs des faces $ABFE$, $BCGF$ et $DCGH$.
Nommer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$,
et tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AM}$.

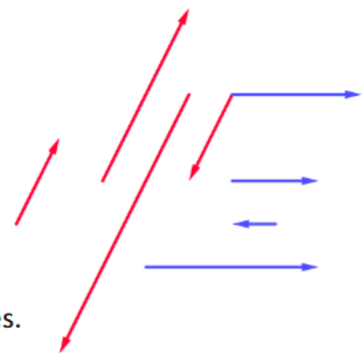


Les faces d’un cube sont toutes des carrés, donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}}$.
M est le milieu de la diagonale $[AF]$ de la face $ABFE$, et P est le milieu de la diagonale $[AG]$ de la face $DCGH$ opposée à $ABFE$, donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PG}}$.
En revanche, la face BCFG *n’est pas opposée à ces dernières faces, donc* $\overrightarrow{\mathrm{BN}}$, *par exemple, n’est pas égal aux vecteurs cités précédemment.*

Définition *(Vecteurs colinéaires)* : soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
S’il existe un réel k tel que $\boldsymbol{\vec{v} = k\vec{u}}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

Cela signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont **même direction**,
mais pas nécessairement même sens ou même norme.

Remarques *:*
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



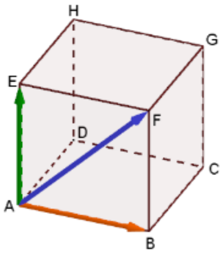
Exemple Dans le plan muni d’un repère, on considère les vecteurs $\vec{a}\binom{6}{-8}$; $\vec{b}\binom{9}{-12}$, $\vec{c}\binom{12}{16}$ et $\vec{d}\binom{-4{,}5}{6}$.
Parmi ces vecteurs, lesquels sont colinéaires ?

On constate, par exemple, que $\vec{b} = 1{,}5\vec{a}$ et que $\vec{b} = -2\vec{d}$. Donc les vecteurs $\boldsymbol{\vec{a}}$**,** $\boldsymbol{\vec{b}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{d}}$ **sont colinéaires**. En revanche, $\vec{c}$ n’est pas colinéaire avec ces trois vecteurs.
Par exemple, $\dfrac{12}{6} = 2$ mais $\dfrac{16}{-8} \neq 2$, donc $\vec{c}$ n’est pas colinéaire avec $\vec{a}$.
Dans le plan, on peut aussi calculer le déterminant des vecteurs, mais la formule correspondante pour l’espace est compliquée et n’est pas étudiée en Terminale.

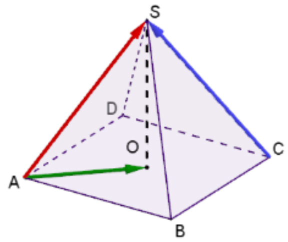
1b. Combinaisons linéaires

Définition *(Combinaison linéaire)* : soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, et $\vec{w}$ un troisième vecteur.
On dit que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, s'il existe deux réels α et β tels que $\boldsymbol{\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}}$
On dira alors aussi que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**.

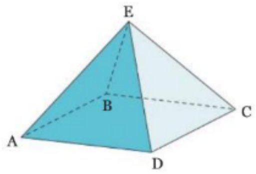
Ci-dessous, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$,
donc $\overrightarrow{AF}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$.



Ci-dessous, $\overrightarrow{CS} = -2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AS}$,
donc $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont coplanaires.

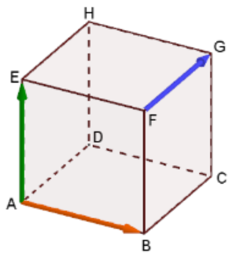


Exemple 1 On considère une pyramide $ABCDE$ de sommet E dont la base est le parallélogramme $ABCD$. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



Exemple 2 Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. On note I le centre du rectangle $ABCD$.
Soient $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = 6\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{BE}$ et $\vec{w} = 5\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IE}$.Exprimer $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque : si $\vec{w}$ ne peut pas être égal à une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c'est-à-dire, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires), on dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement indépendants**.
Exemple : ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont linéairement indépendants.
(On dira plus tard qu'ils forment une base de l'espace)



Exemple 1

Il faut faire apparaitre des $\overrightarrow{AB}$, des $\overrightarrow{AD}$ et des $\overrightarrow{DE}$ dans l'expression de $\vec{w}$.

$\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

On utilise la relation de Chasles sur ces deux vecteurs pour faire apparaître les vecteurs des expressions de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

$\vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$

Or dans le parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Ainsi :

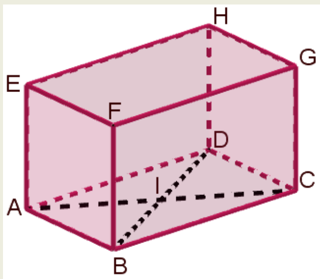
$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$

$\boldsymbol{\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}}$

On a bien réussi à exprimer $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
Donc ces trois vecteurs sont coplanaires.

Exemple 2

Il faut donc faire apparaitre des $\overrightarrow{AB}$, des $\overrightarrow{BD}$ et des $\overrightarrow{BE}$ dans l'expression de $\vec{w}$.
Un schéma peut beaucoup aider ! Notez bien que si le pavé droit s'appelle ABCDEFGH, cela signifie que les faces ABCD et EFGH sont opposées, et que A est en face de E, B est en face de F, etc.



$\vec{w} = 5\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IE}$

Remarquons d'abord que I est le centre du rectangle $ABCD$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\vec{w} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{IE}$

On utilise alors la relation de Chasles pour faire apparaître les vecteurs souhaités.

$\vec{w} = \frac{5}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\right) - (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE})$

Dans le pavé droit, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. De plus, $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

$\vec{w} = \frac{5}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE}$

$\vec{w} = \frac{5}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE}$

$\vec{w} = 5\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}$

$\vec{w} = 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}$

$\vec{w} = \frac{5}{3} \times 3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(6\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BE})$

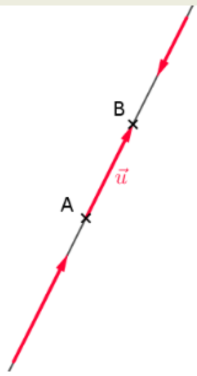
$\boldsymbol{\vec{w} = \frac{5}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}}$

On a bien réussi à exprimer $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

1c. Droites

Propriété *(Droites de l'espace)* : une **droite** est définie :

- soit par la donnée d'un **point $\boldsymbol{A}$** et d'un **vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}$**
- soit par la donnée de deux points A et B *(dans ce cas, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur)*



Dans ce cas, la droite **passant par $\boldsymbol{A}$ et de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}$**
est l'ensemble des **points $\boldsymbol{M}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$ et $\vec{\boldsymbol{u}}$ soient colinéaires.**
Ainsi, un point M appartient à la droite si et seulement si il existe un **réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{u}}$**

Remarques :

- deux **droites sont parallèles** si et seulement si leurs **vecteurs directeurs sont colinéaires**
(si en plus elles passent par un même point A, alors elles sont confondues)
- un vecteur colinéaire à un vecteur directeur est aussi un vecteur directeur.

- en 2^{nde} et $1^{\text{ère}}$, on voit que dans le plan, une droite est aussi un ensemble de points $(x; y)$ qui vérifient une même équation de la forme $ax + by + c = 0$. Ce n'est pas le cas dans l'espace.
- la notion de vecteur normal sera revue dans un autre chapitre, avec le produit scalaire.

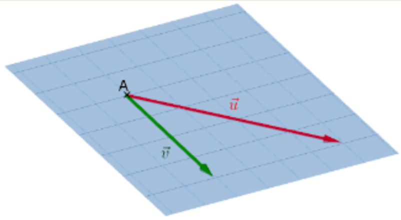
Exemples dans le plan :

a. Soit (d) la droite passant $A(3; 7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{4}{-1}$. Le point $B(-9; 10)$ appartient-il à (d) ?
b. On donne les points $A(-2; 3)$ et $B(4; -1)$. Les points A, B et $C(3; 0)$ sont-ils alignés ?
c. On donne $A(2; -1)$, $B(3; 5)$, $C(-3; 5)$ et $D(-5, -7)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{-9-3}{10-7} = \binom{-12}{3}$
Or $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, et $\boldsymbol{B \in (d)}$.
b. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{4-(-2)}{-1-3} = \binom{6}{-4}$
et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\binom{x_C - x_A}{y_C - y_A} = \binom{3-(-2)}{0-3} = \binom{5}{-3}$
Or ces vecteurs ne sont pas colinéaires : $\dfrac{6}{5} = 1{,}2$ mais $\dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$
Donc les points **$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ ne sont pas alignés**.
c. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{3-2}{5-(-1)} = \binom{1}{6}$
et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\binom{x_D - x_C}{y_D - y_C} = \binom{-5-(-3)}{-7-5} = \binom{-2}{-12}$
Or $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$: ces deux vecteurs sont colinéaires. Ainsi $\boldsymbol{(AB)//(CD)}$.

1d. Plans

Propriété *(Plan de l'espace)* : un **plan** est défini :

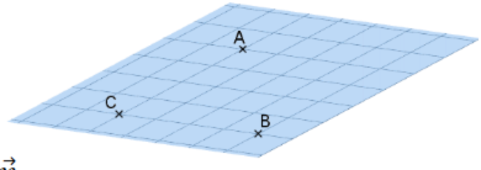


- soit par la donnée d'un **point $\boldsymbol{A}$** et de deux **vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires,**

- soit par la donnée de trois **points $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ non alignés.**

On parle alors du plan (ABC)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ jouent le rôle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Dans ce cas, le plan défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

est l'ensemble des **points $\boldsymbol{M}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**.

Ainsi, un point $\boldsymbol{M}$ **appartient à ce plan** si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}}$

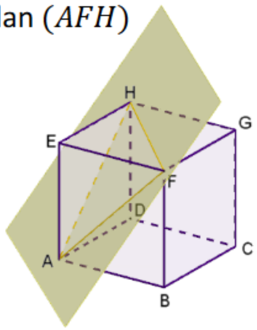
Définition : soient quatre points A, B, C et M. On dit que ces quatre points sont **coplanaires** s'ils appartiennent au même plan, autrement dit si $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarque : A, B, C et M sont coplanaires si et seulement si M appartient au plan (ABC).

Dans le cube $ABCDEFGH$, le plan (AFH) est caractérisé :

- par les trois points A, F et H,
- ou par le point A,

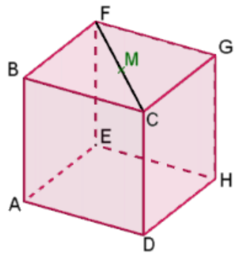
et les deux vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.



Exemple Dans le cube $ABCDEFGH$, M est le milieu de $[FC]$.

a. Caractériser le plan (ADH) par un point et deux vecteurs, puis démontrer que le point E lui appartient.

b. Montrer de la même manière que $M \in (AGH)$.



a. Le plan (ADH) est défini **par le point $\boldsymbol{A}$ et par les vecteurs $\boldsymbol{\overrightarrow{AD}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{AH}}$**.

Or $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD}$, car dans le carré $ADHE$, on a $\overrightarrow{HE} = -\overrightarrow{AD}$.

On a réussi à exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$.

Ainsi, $\boldsymbol{E \in (ADH)}$.

Le calcul aurait été légèrement plus facile en considérant que le plan (ADH) *est défini par le point* A *et les vecteurs* $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$*, ce qui est possible aussi. On a alors* $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{DH}}$*, ce qui montre aussi que* $\mathrm{E} \in (\mathrm{ADH})$*.*

b. Tout d'abord, M étant le milieu de $[FC]$ et BCGF étant un carré, alors M est également le milieu de $[BG]$.

Le plan (AGH) est défini par le point A et par les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HG}$. *On choisit les vecteurs les plus « simples » au vu du point que l'on veut atteindre.*

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, et $\overrightarrow{BM}$ est la moitié de $\overrightarrow{BG}$, qui est égal à $\overrightarrow{AH}$.

Ainsi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AH}$.

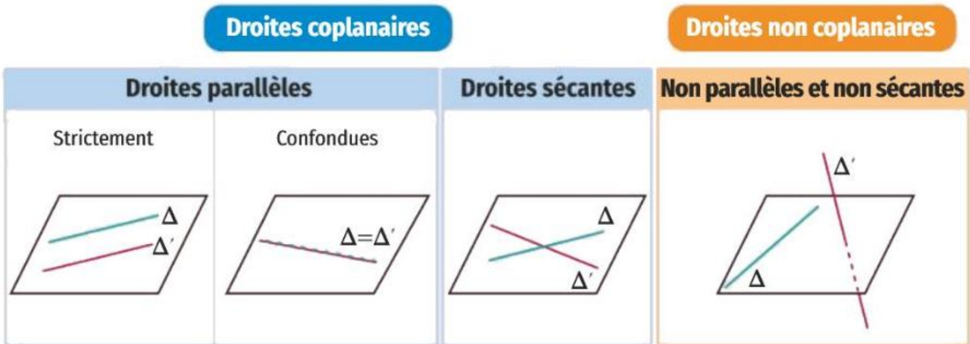
On a réussi à exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HG}$.

Ainsi, $\boldsymbol{M \in (AGH)}$.

2. Positions relatives

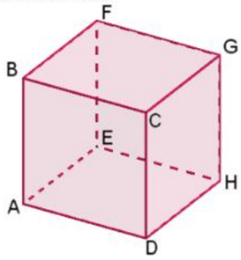
2a. Position de deux droites

Définition : Dans l'espace, deux droites peuvent être coplanaires ou non.
Si elles sont coplanaires, elles sont soit sécantes, soit parallèles.
Remarque : attention, dans l'espace, deux droites non sécantes ne sont pas forcément parallèles.



Exemple 1 Dans le cube ci-dessous, donner les positions relatives de :

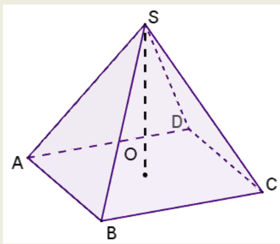
a. (AD) et (EA) **b.** (CG) et (BF)
c. (AE) et (GH) **d.** (AD) et (FG)
e. (CD) et (BG) **f.** (EC) et (FG)



Exemple 2 $SABCD$ est une pyramide dont la base est un carré de centre O.
Donner les positions relatives de (AB) et (CD), de (AB) et (SD), et de (SO) et (AC).

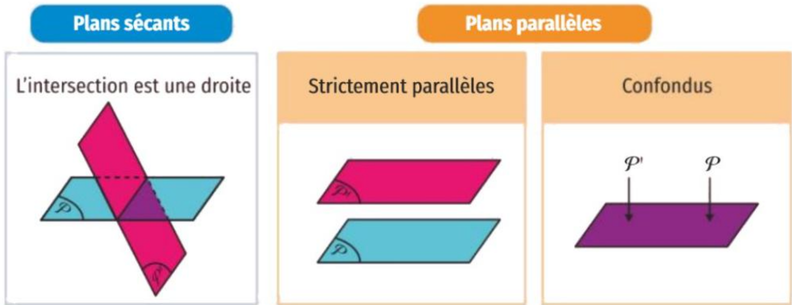
Exemple 1
a. (AD) et (EA) sont **sécantes en A**.
b. (CG) et (BF) sont des côtés opposés du carré $BCGF$. Elles sont **parallèles**.
c. (AE) et (GH) n'ont pas la même direction, et ne se coupent pas. Elles sont **non coplanaires**.
d. (AD) et (FG) sont toutes les deux parallèles à (BC), de même qu'en **b**.
Elles sont donc **parallèles** entre elles.
e. (CD) et (BG) n'ont pas la même direction, et ne se coupent pas. Elles sont **non coplanaires**.
f. (EC) et (AG) se coupent au centre du cube ! Elles sont **sécantes**.

Exemple 2
À nouveau, un schéma peut aider.
(AB) et (CD) sont des diagonales d'un carré. Elles sont **sécantes**.
(AB) et (SD) n'ont pas la même direction et ne se coupent pas.
Elles sont **non-coplanaires**.
(SO) et (AC) sont **sécantes en O**, qui est le milieu de $[AC]$.

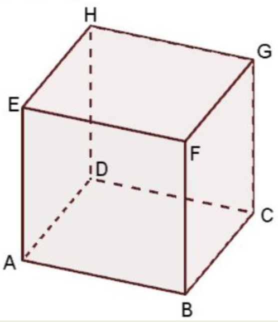


2b. Position de deux plans

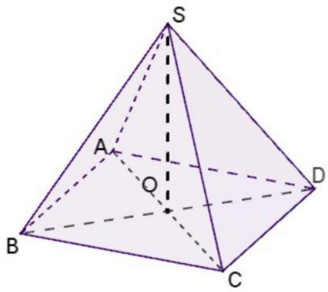
Définition : Deux plans sont soit parallèles, soit sécants.
Remarque : pour déterminer la droite d’intersection de deux plans sécants, il suffit de déterminer deux points qui appartiennent aux deux plans.



Exemple 1 Dans le cube $ABCDEFGH$, quelles sont les positions relatives de (ABC) et (EFH) ? Et de (BCF) et (ADG) ?



Exemple 2 $SABCD$ est une pyramide dont la base est un carré de centre O.



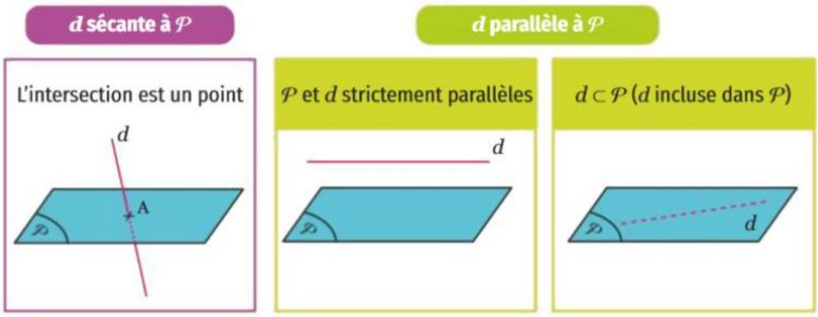
a. Déterminer l’intersection des plans (SBO) et (SAC)
b. Déterminer l’intersection des plans (SAB) et (SDC)

Exemple 1
• (ABC) et (EFH) sont des faces opposés d’un cube. Ils sont **parallèles**.
• (BCF) est une face du cube, (ADG) suit une diagonale. Ils sont **sécants**. La droite d’intersection est (FG).

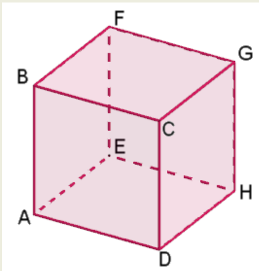
Exemple 2
• Les points O et S appartiennent aux deux plans (SBO) et (SAC), donc ces plans sont **sécants selon la droite (OS)**.
• Le point S appartient aux deux plans (SAB) et (SDC).
De plus, ces deux plans incluent chacun une droite parallèle à l’autre : la droite (AB) est incluse dans (SAB), et la droite (CD) est incluse dans (SDC), et $(AB)//(CD)$.
Donc les plans (SAB) et (SDC) sont **sécants selon la droite passant par S et parallèle à (AB) ou (DC)**.
On a en fait appliqué le « théorème du toit » qui sera vu plus tard.

2c. Droite et plan

Définition : Une droite est soit sécante à un plan, soit parallèle à ce plan (elle peut alors y être incluse).



Exemple : Si $ABCDEFGH$ est un cube, donner les positions relatives de (ABG) et (CD), et de (CFH) et (AB).



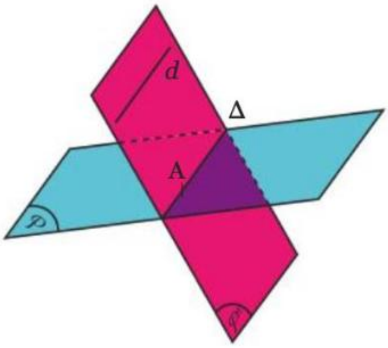
À nouveau, un schéma de cube facilite le travail.

• La droite (CD) est parallèle à la droite (AB) du plan (ABG). Donc la droite (CD) et le plan (ABG) sont strictement parallèles. *On a utilisé la première propriété de la partie suivante.*

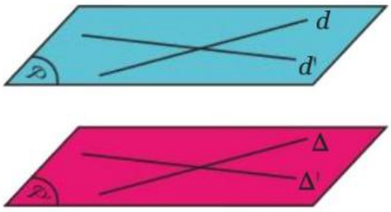
• La droite (AB) est parallèle à la droite (GH), qui est sécante en H au plan (CFH). Donc la droite (AB) et le plan (CFH) sont sécants. *Ils se coupent en un point au-dessus de B.*

2d. Propriétés

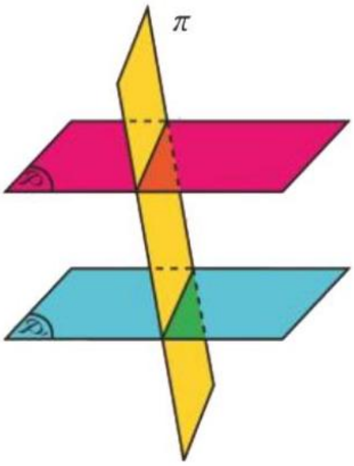
Propriété : une droite d est parallèle à un plan $\wp$ ssi il existe une droite Δ du plan $\wp$ qui est parallèle à d.



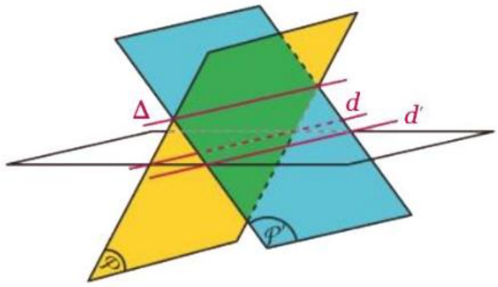
Propriété : un plan $\wp'$ est parallèle à un plan $\wp$ ssi il existe deux droites sécantes de $\wp'$ qui sont parallèles à deux droites sécantes de $\wp$.



Propriété : soient $\wp$ et $\wp'$ deux plans parallèles.
Tout plan qui coupe l'un de ces plans coupe l'autre et les droites d'intersections sont alors parallèles.



Propriété : *(Théorème du toit)*
Soient d et d' deux droites parallèles.
Soit $\wp$ un plan contenant d,
sécant à un autre plan $\wp'$ contenant d'.
Alors la droite Δ, intersection de $\wp$ et $\wp'$,
est parallèle à d et à d'.



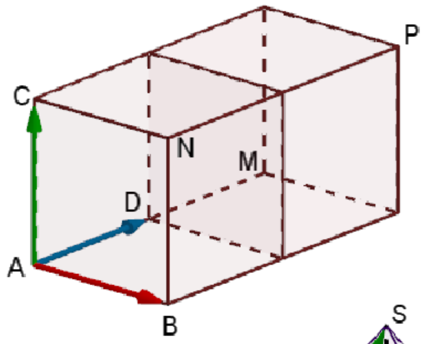
3. Bases et décompositions

3a. Coordonnées d'un vecteur

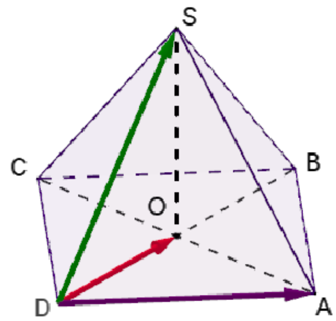
Propriété : Soient trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, et $\vec{k}$ linéairement indépendants. Alors ces vecteurs forment une base de l'espace : pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: ce sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, ;\vec{\jmath}\ ; \vec{k})$.

Exemple 1 Dans la figure ci-contre, qui est constituée de deux cubes, on considère la base $(\overrightarrow{AB}\ ; \overrightarrow{AC}\ ; \overrightarrow{AD}\ )$.
Donner la décomposition et les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\ ; \overrightarrow{AN}\ ; \overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{CP}$ dans cette base.

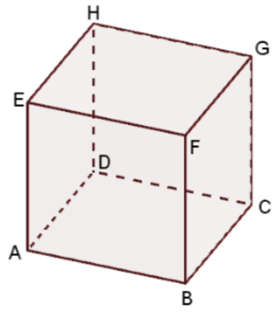


Exemple 2 $SABCD$ est une pyramide dont la base est un carré de centre O.
On considère la base $(\overrightarrow{DA}\ ; \overrightarrow{DO}\ ; \overrightarrow{DS}\ )$.
Donner la décomposition et les coordonnées de $\overrightarrow{DB}\ ; \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CS}$ dans cette base.



- $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{\boldsymbol{AN}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{PN} = -2\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{\boldsymbol{PN}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{\boldsymbol{CP}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : Pour justifier que trois vecteurs forment une base, on peut prouver qu'ils ne sont pas coplanaires (c'est-à-dire qu'ils sont linéairement indépendants), soit par lecture de la figure, soit par l'absurde.



Exemple 1 On considère le cube $ABCDEFGH$.

a. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne forment pas une base de l'espace.

b. Expliquer pourquoi le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

Exemple 2

On considère trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, et $\vec{k}$ qui forment une base de l'espace.
Dans cette base, on définit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Démontrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment aussi une base de l'espace.

Exemple 1

a. Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est égal à $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. Ces trois vecteurs ne sont donc **pas linéairement indépendants**, ils ne forment pas une base de l'espace.

b. Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$ sont linéairement indépendants : **on ne peut pas en exprimer un en fonction des deux autres**. Il s'agit donc d'une base de l'espace.

Exemple 2

Ici, on attend une démonstration rigoureuse. Nous allons le faire par l'absurde.

Supposons que $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas linéairement indépendants.
On peut alors exprimer, par exemple, $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

Cette égalité peut se réécrire sous la forme d'un système d'équations, dont les inconnues sont α et β : $\begin{cases}-1 = \alpha + 2\beta\\ 2 = -\alpha - 3\beta\\ 1 = 2\alpha + 2\beta\end{cases}$

Déterminons α et β par la méthode de substitution. Dans la première ligne, on isole α : on obtient $\alpha = -1 - 2\beta$.

On remplace alors α par $(-1 - 2\beta)$ dans les deux autres lignes :

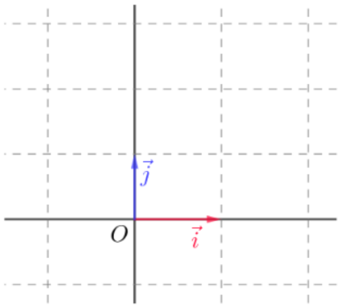
$$\begin{cases}\alpha = -1 - 2\beta\\ 2 = -(-1-2\beta) - 3\beta\\ 1 = 2(-1-2\beta) + 2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -1 - 2\beta\\ 2 = 1 - \beta\\ 1 = -2 - 2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -1 - 2\beta\\ \beta = 1 - 2\\ 2\beta = -2 - 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -1 - 2\beta\\ \beta = -1\\ \beta = -1{,}5\end{cases}$$

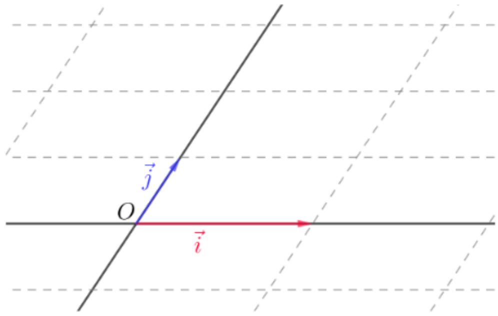
Nous trouvons deux valeurs différentes pour β, il s'agit d'une contradiction.
Ainsi, α et β n'existent pas. Les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants et $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ **est une base de l'espace**.

3b. Repère et coordonnées d'un point

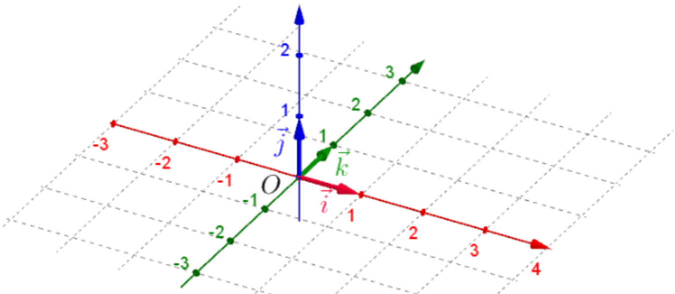
Définition : Si $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est une base, O est un point de l'espace qu'on appelle origine, le quadruplet $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est un repère de l'espace.

Remarque : dans le plan,
il suffisait d'un point O,
et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$
pour obtenir un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$,
non nécessairement orthonormé :

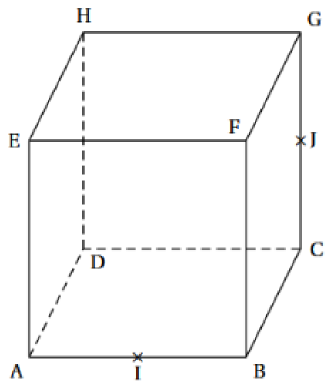




Dans l'espace, on peut aussi repérer des points et décomposer des vecteurs, mais il faut pour cela une base de trois vecteurs $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, linéairement indépendants.

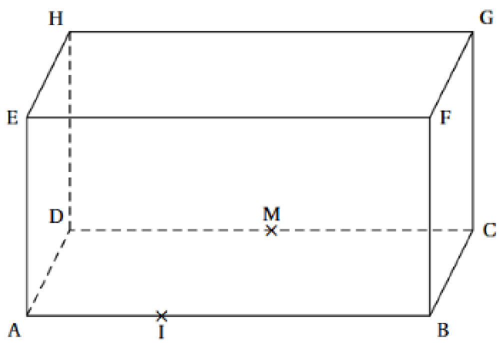


Exemple 1 On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre et on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
Le point I est le milieu du segment $[AB]$ et le point J est le milieu du segment $[CG]$.
Donner les coordonnées des points B, F, I et J.



Exemple 2 On considère un repère orthonormé $(A; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de l'espace dans lequel on place les points $B(4; 0; 0)$, $D(0; 4; 0)$ et $E(0,0,4)$ et les points C, F, G et H de sorte que le solie $ABCDEFGH$ soit un cube.
On considère les points I milieu de $[EF]$, et J tel que $\overrightarrow{HJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{HD}$.
Réaliser un schéma puis donner les coordonnées des points $G; H; I$ et J.

Exemple 3 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-contre.
On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.
On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
Donner les coordonnées des points $F; H; M$.

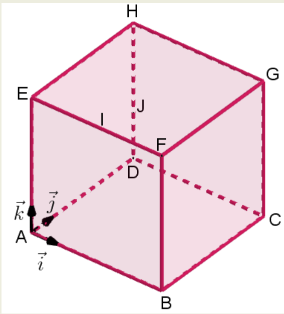


Exemple 1

- $\overrightarrow{AB}$ est le premier vecteur du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, donc $\boldsymbol{B(1; 0; 0)}$.

• $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, donc dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on a $\boldsymbol{F(1; 0; 1)}$.
• I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\boldsymbol{I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)}$.
• En suivant la même logique, $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Ainsi, $\boldsymbol{J\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)}$.

Exemple 2 *Une fois encore, tout est plus simple avec un schéma.*



• $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ donc $\boldsymbol{G(4; 4; 4)}$.
• $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ donc $\boldsymbol{H(0; 4; 4)}$.
• $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} + 4\vec{k}$ donc $\boldsymbol{I(2; 0; 4)}$.
• L'égalité $\overrightarrow{HJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HD}$ implique que $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.
$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = 4\vec{\jmath} + \frac{4}{3}\vec{k}$ donc $\boldsymbol{J\left(0; 4; \frac{4}{3}\right)}$.

Exemple 3
• $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{F(3; 0; 1)}$.
• $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{H(0; 1; 1)}$.
• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ donc $\boldsymbol{M\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)}$.

3c. Opérations

Propriété : dans un repère de l'espace, soient deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_B - x_A} \\ \boldsymbol{y_B - y_A} \\ \boldsymbol{z_B - z_A} \end{pmatrix}$
- leur **milieu** du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\boldsymbol{\frac{x_A+x_B}{2}}\,;\,\boldsymbol{\frac{y_A+y_B}{2}}\,;\,\boldsymbol{\frac{z_A+z_B}{2}}\right)$
- la **norme** d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \boldsymbol{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
- la **distance AB** est donc $AB = \boldsymbol{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$

Exemple 1 Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; 0)$, $B(3; 0; -1)$ et $C(7; 1; -2)$ et $D(11; -1; -4)$.

a. Déterminer les coordonnées de I, milieu du segment $[AB]$.

b. Démontrer que les points A; B et C définissent bien un plan.

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

Exemple 2 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. L'unité est le cm.

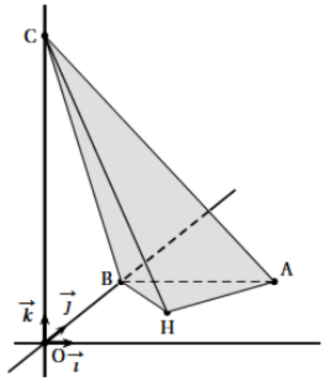
On considère les points $A(5; 5; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 10)$ et $H\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

On admet que la droite (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle.

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$, arrondi au centième.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base du tétraèdre, et h sa hauteur.



Exemple 1

a. $I\left(\frac{1+3}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{0-1}{2}\right)$ et ainsi $\boldsymbol{I(2; 0,5; -0,5)}$.

b. *Trois points définissent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés.*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-1 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7-1 \\ 1-1 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Or ces vecteurs ne sont pas colinéaires : par exemple, $\frac{6}{2} = 3$ mais $\frac{0}{-1} = 0 \neq 3$.

Ainsi, **$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ ne sont pas alignés** et le plan (ABC) est bien défini.

c. *La question revient à déterminer si les points* A, B, C *et* D *sont coplanaires.*

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 11-1 \\ -1-1 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Déterminons si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Soient α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On écrit cette égalité sous forme de système d'équations pour trouver les valeurs de α et de β : $\begin{cases} 10 = 2\alpha + 6\beta \\ -2 = -\alpha \\ -4 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$

Or dans la deuxième ligne, on voit immédiatement que $\alpha = 2$. Ainsi :

$$\begin{cases} 10 = 2 \times 2 + 6\beta \\ \alpha = 2 \\ -4 = -2 - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 6\beta \\ \alpha = 2 \\ -2 = -2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

On trouve la même valeur de β dans les deux autres lignes sans contradiction.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$.
Donc **le point D appartient bien au plan (ABC)** défini par le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemple 2

a. *Oooh. Il va falloir appliquer le théorème de Pythagore !*

$$AB = \sqrt{(5-0)^2 + (5-5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AH = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 5\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{6{,}25 + 6{,}25} = \sqrt{12{,}5}$$

$$BH = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{6{,}25 + 6{,}25} = \sqrt{12{,}5}$$

Donc $AB^2 = 25$ et $AH^2 + BH^2 = 12{,}5 + 12{,}5 = 25$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABH est rectangle en H**.

b. Calculons d'abord $\mathcal{B}$, l'aire du triangle ABH. On peut utiliser les côtés de l'angle droite $[AH]$ et $[BH]$ comme base et hauteur.

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{12{,}5} \times \sqrt{12{,}5}}{2} = \frac{12{,}5}{2} = 6{,}25 \text{ cm}^2$$

Ensuite, on remarque que la hauteur $[CO]$ mesure 10 cm. Ainsi :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h = \frac{62{,}5}{3} \approx \mathbf{20{,}83\ cm^3}$$

4. Représentation paramétrique

4a. Propriété

Dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, la droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ admet comme représentation paramétrique le système : $\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

Exemple 1 Donner une représentation de la droite d passant par $A(2;9;0)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Exemple 2 Donner une représentation paramétrique de la droite (AB), où $A(0;4;2)$ et $B(-2;4;3)$.

Exemple 3 Déterminer un point et un vecteur directeur pour les deux droites suivantes.

a. $\begin{cases}x=-2k\\y=-1+k\\z=-3-4k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases}x=t\\y=3\\z=2-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Remarque : **Un point $M(x;y;z)$ appartient à la droite** si et seulement s'il existe un réel t tel que les coordonnées x, y et z, sont solution du système d'équations.

Exemple 4 Soit la droite (d) de représentation paramétrique : (d): $\begin{cases}x=4-t\\y=1+t\\z=-2t\end{cases}$

a. Déterminer si les points $M(3;2;-2)$ et $N(6;3;4)$ appartiennent à (d).
b. Le vecteur $\vec{u}(2;-2;4)$ est-il un vecteur directeur de (d) ?

Remarque : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques : on peut choisir n'importe quel vecteur colinéaire à un vecteur directeur donné, et n'importe quel point de la droite.

Exemple 5 Soient deux points $A(-3;2;-1)$ et $B(3;0;-7)$.

La droite (AB) admet-elle pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=3s+3\\y=-s\\z=-3s-7\end{cases}$ avec s réel ?

Exemple 1 La représentation paramétrique de la droite d est $\boldsymbol{d}$: $\begin{cases}\boldsymbol{x=2+5t}\\\boldsymbol{y=9+t}\\\boldsymbol{z=-t}\end{cases}$

Exemple 2 La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-0\\4-4\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

En utilisant le point $A(0;4;2)$ *(on pourrait utiliser* B *sans problème)*, la représentation paramétrique de la droite (AB) est $(\boldsymbol{AB})$: $\begin{cases}\boldsymbol{x=-2t}\\\boldsymbol{y=4}\\\boldsymbol{z=2+t}\end{cases}$

Exemple 3 a. La droite passe par $\boldsymbol{A(0;-1;-3)}$ et est dirigée par $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}}$

b. La droite passe par $\boldsymbol{A(0;3;2)}$ et est dirigée par $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}$.

Exemple 4

a. • On remplace les coordonnées x, y, z par celles de M : $\begin{cases}3=4-t\\2=1+t\\-2=-2t\end{cases}$

On détermine t dans chaque équation : $\begin{cases}3=4-t\\2=1+t\\-2=-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3-1=-t\\2-1=t\\\dfrac{-2}{-2}=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\t=1\\t=1\end{cases}$

On ne trouve pas de contradiction, donc $\boldsymbol{M\in(d)}$.

• On remplace les coordonnées x, y, z par celles de N : $\begin{cases}6=4-t\\3=1+t\\4=-2t\end{cases}$

On détermine t dans chaque équation : $\begin{cases}6=4-t\\3=1+t\\4=-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6-4=-t\\3-1=t\\\dfrac{4}{-2}=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-2\\t=2\\t=-2\end{cases}$

On trouve des valeurs différentes pour t, il y a une contradiction, donc $\boldsymbol{N\notin(d)}$.

b. D'après sa représentation paramétrique, la droite (d) est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Or $\vec{u}=-2\vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Ainsi, $\boldsymbol{\vec{u}}$ **est aussi un vecteur directeur de** $\boldsymbol{(d)}$.

Exemple 5

La représentation proposée correspond à une droite passant par $B(3;0;-7)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-3)\\0-2\\-7-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-6\end{pmatrix}=-2\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Donc la droite proposée passe par $B(3;0;-7)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AB}$. **Il s'agit bien d'une représentation paramétrique de la droite** $\boldsymbol{(AB)}$.

4b. Position relative de deux droites

Exemple 1 On considère les droites d et d' dont les représentations paramétriques sont

$d:\begin{cases} x = 9 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $d':\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a. Vérifier si les droites sont parallèles. **b.** Déterminer si leur point d'intersection existe, sinon conclure.

Remarque : quand on répond à cette question, les paramètres t des deux droites ne correspondent pas au même nombre. Autrement dit, « le t de la droite d » n'est pas égal au « t de la droite d' ».

Il faut donc **nommer ces deux paramètres différemment**, par exemple t et t', ou bien t et k.

Exemple 2 Dans chaque cas, déterminer la position relative des droites (d) et (d').

a. $(d):\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -6t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ $(d'):\begin{cases} x = 1 - 3t' \\ y = 9t' + 5 \\ z = -6t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

b. $(d):\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ $(d'):\begin{cases} x = k + 5 \\ y = 2k \\ z = -k - 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Exemple 1

a. La droite d est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et la droite d' est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (par exemple, $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1}$) donc les droites d et d' ne sont **pas parallèles**. Elles peuvent être sécantes, ou non-coplanaires.

b. *S'il existe un point d'intersection, alors ce point correspond à un paramètre* t *de la droite* d, *et il correspond aussi à un paramètre* t' *(pas nécessairement le même) de la droite* d'.

On « mélange » donc les deux représentations paramétriques pour essayer de trouver la valeur de t, *et la valeur de* t'. *Si on arrive à une contradiction, c'est que le point d'intersection n'existe pas : les droites sont alors non-coplanaires.*

Soit M un éventuel point d'intersection. Il existe alors t et t' réels tels que :

$$\begin{cases} 9 + t = t' \\ -1 + 2t = 2 - t' \\ -3t = -1 + t' \end{cases}$$

On fait bien attention à donner des noms différents aux deux paramètres (t *et* t').

D'après la première ligne, $t' = 9 + t$. On remplace donc t' par $(9 + t)$.

$$\begin{cases} t' = 9 + t \\ -1 + 2t = 2 - (9 + t) \\ -3t = -1 + (9 + t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 9 + t \\ -1 + 2t = -7 - t \\ -3t = 8 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 9 + t \\ t + 2t = -7 + 1 \\ -3t - t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 9 + t \\ 3t = -6 \\ -4t = 8 \end{cases}$$

On trouve que $t = -2$ dans les deux dernières lignes, il n'y a pas de contradiction.

Les droites d et d' sont donc sécantes. On trouve également que $t' = 9 + (-2) = 7$.

Le point d'intersection est le point de d de paramètre $t = -2$ *(ou le point de* d' *de paramètre* $\mathrm{t}' = 7$*, ce qui donne le même point)* :

$$\begin{cases} x = 9 + (-2) \\ y = -1 + 2 \times (-2) \\ z = -3 \times (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -5 \\ z = 6 \end{cases}$$ et $\boldsymbol{M(7;-5;6)}$.

Exemple 2

a. La droite (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$ et la droite (d') est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\9\\-6\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont colinéaires car $\vec{v} = -1{,}5\vec{u}$.

Les droites $(\boldsymbol{d})$ **et** $(\boldsymbol{d'})$ **sont donc parallèles**.

b. La droite (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et la droite (d') est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (par exemple, $\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$) donc les droites (d) et (d') ne sont **pas parallèles**. Elles peuvent être sécantes, ou non-coplanaires.

Soit M un éventuel point d'intersection. Il existe alors t et k réels tels que :

$$\begin{cases} 1 - 2t = k + 5 \\ 4 = 2k \\ -1 + t = -k - 1 \end{cases}$$

La deuxième ligne fournit $t' = 2$. On remplace t' par 2 dans les autres lignes.

$$\begin{cases} 1 - 2t = 2 + 5 \\ k = 2 \\ -1 + t = -2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t = 2 + 5 - 1 \\ k = 2 \\ t = -2 - 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t = 6 \\ k = 2 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ k = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

On a trouvé deux valeurs différentes de t, il s'agit d'une contradictions.

Le point d'intersection n'existe donc pas : $(\boldsymbol{d})$ **et** $(\boldsymbol{d'})$ **sont non-coplanaires.**

Notez que t *et* k *peuvent être différents sans qu'on ait une contradiction. Pour en avoir une, il faut trouver deux valeurs différentes pour le même paramètre.*

Il arrive aussi parfois que l'on trouve une contradiction sous la forme d'une égalité manifestement fausse, par exemple « $1 = 2$ ».