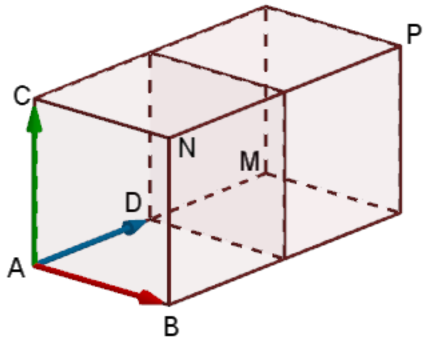
Exercices sur la géométrie dans l'espace

Partie A : exercices d'application

Exercice 1

Dans la figure ci-contre, qui est constituée de deux cubes, on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}\ ; \overrightarrow{AC}\ ; \overrightarrow{AD})$.



a. Donner les coordonnées des points C, M, N et P.

b. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$.

c. Déterminer les coordonnées du point I, milieu du segment $[DP]$.

d. Calculer la distance MN.

Exercice 2

On donne dans l'espace muni d'un repère, les deux points suivants : $A(5; 1; -2)$ et $B(1; 0; 1)$

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

On donne également la droite (d) de représentation paramétrique $(d) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b. Donner un vecteur directeur de la droite (d), puis en donner un autre.

c. Le point $C(3; 4; 1)$ appartient-t-il à la droite (d) ?

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants :

$$A(-1; 0; 5); B(2; 1; 3); C(1; 1; 1); D(4; -2; 1); E(1; 0; 1)$$

a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Déterminer si le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. En déduire la position relative de la droite (DE) et du plan (ABC).

Exercice 4

Dans chaque cas, déterminer la position relative des droites (d) et (d').

Si elles sont sécantes, donner le point d'intersection. Si elles sont parallèles, vérifier si elles sont alors confondues.

a. $(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(d') : \begin{cases} x = 9 + 2k \\ y = -1 \\ z = -11 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

b. $(d) : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(d') : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -6t \\ z = 5 - 4t \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Partie B : exercices de synthèse

Exercice 5

$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ dont toutes les arêtes ont même longueur.
Le point I est le centre du carré $ABCD$.
On suppose que $IS = IC = IB = 1$.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses est exacte. Indiquer laquelle sans justifier.

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :
a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $(I;\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IS})$
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0;0;0)\ ;\ \ A(-1;0;0)\ ;\ \ B(0;1;0)\ ;\ \ C(1;0;0)\ ;\ \ D(0;-1;0)\ ;\ \ S(0;0;1)$$

2. Les coordonnées du milieu N de $[KL]$ sont :
a. $(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4})$ **b.** $(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ **c.** $(-\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ **d.** $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1)$

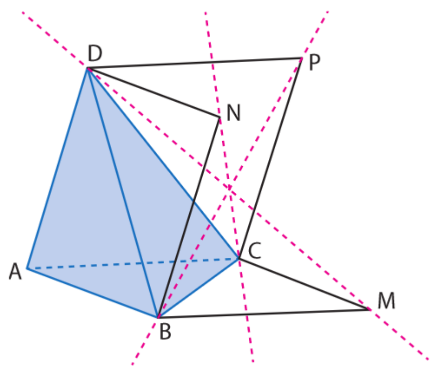
3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont : **a.** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est, pour t réel :

a. $\begin{cases}x=-1-t\\y=t\\z=-t\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=0\\z=1+2t\end{cases}$ **c.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$ **d.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$

Exercice 6 On considère le tétraèdre $ABCD$ et les points M, N et P tels que les quadrilatères $ABMC$, $ABND$ et $ACPD$ sont des parallélogrammes.
On cherche à démontrer que les droites (DM), (CN) et (BP) sont concourantes.
On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$

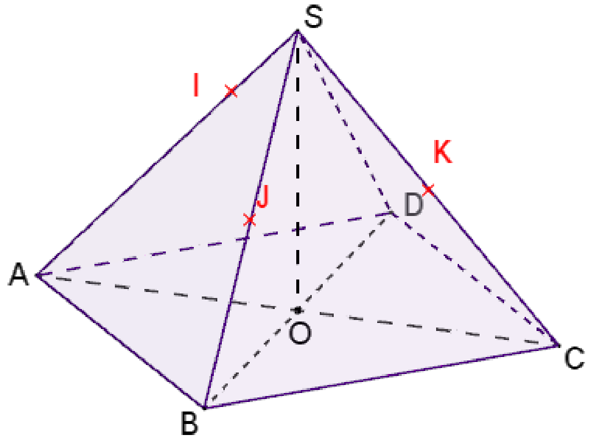
1. Calculer les coordonnées de spoints M, N et P.
2. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (DM), (CN) et (BP).
3. En déduire que ces droites sont concourantes en un point Q dont on donnera les coordonnées.



Exercice 7 Dans un cube $ABCDEFGH$, on place les points M, N et P tels que M est le milieu du segment $[BC]$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$. On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD), ainsi que de la droite (MN).
2. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (AD) et (MN).
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (PL).
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites (PL) et (DH).

Exercice 8

On considère une pyramide $SABCD$ telle que la base $ABCD$ soit un rectangle. I est le point de $[SA]$ tel que $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SA}$. J et K sont les milieux respectifs des segments $[SB]$ et $[SC]$.



1. Donner sans justifier la position relative des droites (JK) et (AB).

2. **a.** Montrer que les droites (JK) et (BC) sont parallèles.

b. En déduire la position relative de la droite (JK) et du plan (ABC)

3. **a.** Déterminer la position relative des droites (IJ) et (AB).

b. Justifier alors que les plans (IJK) et (ABC) sont sécants.

4. **a.** A l'aide de deux points, construire sur la figure, sans justifier mais en laissant apparaître tous les traits de construction, la droite Δ, intersection des plans (IJK) et (ABC).

b. Montrer que les droites (JK) et Δ sont parallèles.

5. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}$. Montrer que les plans (PJK) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

On considère la droite d passant par les points $A(1; 1; -2)$ et $B(-1; 3; 2)$

et la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses est exacte. Indiquer laquelle sans justifier.

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite d' ?

a. $M_1(-1; 3; -2)$ **b.** $M_2(11; -9; -22)$ **c.** $M_3(-7; 9; 2)$ **d.** $M_4(-2; 3; 4)$

2. Un vecteur directeur de la droite d' est :

a. $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Les droites d et d' sont : **a.** sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Exercice 10

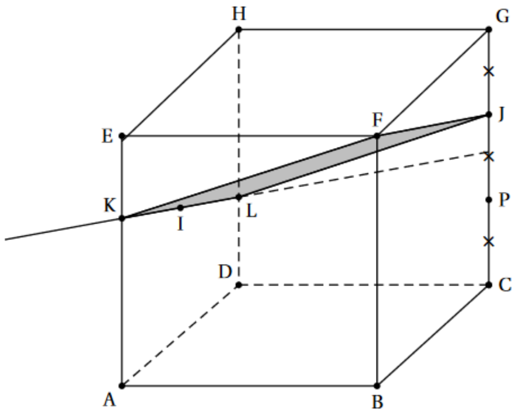
$ABCDEFGH$ est un cube. I est le centre de la face $ADHE$ et J est un point du segment $[CG]$.

Il existe donc $a \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.

On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ)

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.



Partie A : dans cette partie, $a = \frac{2}{3}$

1. Donner les coordonnées des points F, I et J.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

3. **a.** Montrer que le point de coordonnées $(0; 0; \frac{2}{3})$ est le point K.

b. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).

4. **a.** Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.

b. Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un losange.

c. Le quadrilatère $FJLK$ est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont $K(0; 0; 1 - \frac{a}{2})$ et $L(0; 1; \frac{a}{2})$. On rappelle que $a \in [0; 1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.

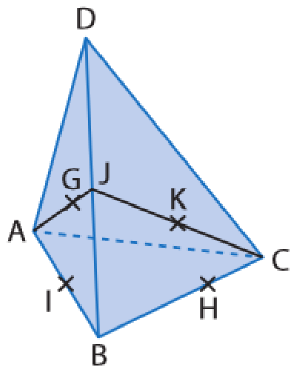
2. Montrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.

Exercice 11

On considère un tétraèdre $ABCD$, les points I, J et K milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BD]$ et $[CJ]$

et les points G et H définis par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

On se place dans le repère $\left(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$.



1. Donner les coordonnées de tous les points de la figure.

2. a. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{IK} = a\overrightarrow{IG} + b\overrightarrow{IH}$.

b. Que peut-on en déduire pour les points G, H, I et K ?

3. a. Déterminer les représentations paramétriques des droites (IG) et (HK).

b. Déterminer leur position relative.