Chapitre 1 – Suites, limites et récurrence

1. Rappels sur les suites

1a. Suites explicites et récurrentes

Définition : une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Notation : pour $n \in \mathbb{N}$, l'image de n par une suite u se note $u(n)$, mais plus souvent u_n.
On dit qu'u_n est un terme de la suite, n est appelée l'indice. La suite complète est notée (u_n).

Exemple 1 Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{2n}{n+1}$$

Justifier que (v_n) est bien définie, et calculer ses 4 premiers termes.

Remarque : pour $n \in \mathbb{N}$, si u_n représente un terme d'une suite,
$\boldsymbol{u_{n+1}}$ représente le terme **suivant**, et $\boldsymbol{u_{n-1}}$ le terme **précédent**.

Exemple 2 soit (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 4n - 7$. On pose $n = 6$. On a : $w_n =$

$w_{n+1} =$ $\qquad$ $w_{n-1} =$

$w_n + 1 =$ $\qquad$ $w_n - 1 =$

Exemple 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ est strictement positif, donc (v_n) est bien définie *(on ne risque pas de diviser par zéro).*

Ses quatre premiers termes sont :

$$v_0 = \frac{2\times 0}{0+1} = 0 \ ; \ v_1 = \frac{2\times 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \ ; \ v_2 = \frac{2\times 2}{1+2} = \frac{4}{3} \ ; \ v_3 = \frac{2\times 3}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Notez que le 1er terme est v_0, le terme d'indice 0, et le 4ème terme est v_3.

Exemple 2

Si $n = 6$, alors $\boldsymbol{w_n} = w_6 = 4\times 6 - 7 = \mathbf{17}$.

$\boldsymbol{w_{n+1}} = w_{6+1} = w_7 = 4\times 7 - 7 = \mathbf{21}$ $\qquad$ $\boldsymbol{w_{n-1}} = w_{6-1} = w_5 = 4\times 5 - 7 = \mathbf{13}$

$\boldsymbol{w_n} + \mathbf{1} = w_6 + 1 = 17 + 7 = \mathbf{18}$ $\qquad$ $\boldsymbol{w_n} - \mathbf{1} = w_6 - 1 = 17 - 7 = \mathbf{16}$

Définition : Une suite est **définie par récurrence** si **chaque terme est défini en fonction du précédent**.

Exemple 1 Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{2v_n-2}{v_n-3}$

Calculer ses trois premiers termes.

Exemple 2 Soit (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 3$ et $w_{n+1} = -w_n + n$. Calculer w_1 , w_2 et w_3.

Exemple 3 *(suite récurrente d'ordre 2)* Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Calculer les six premiers termes. (u_n) est la suite de Fibonacci.

Exemple 4 *(deux suites récurrentes)*

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par : $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = 0{,}8a_n - b_n \end{cases}$

Calculer a_1, a_2, b_1 et b_2.

Exemple 1 Le premier terme est déjà donné, c'est $\boldsymbol{v_0 = 2}$.

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{2v_0 - 2}{v_0 - 3} = \frac{2 \times 2 - 2}{2 - 3} = \frac{2}{-1} = \boldsymbol{-2}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \frac{2v_1 - 2}{v_1 - 3} = \frac{2 \times (-2) - 2}{-2 - 3} = \frac{-6}{-5} = \boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

Exemple 2 *Quand on calcule* w_1, *on remplace le* n *de la formule de récurrence par* 0. *Par conséquent, tous les* n *sont à remplacer par* 0.

$\boldsymbol{w_1} = -w_0 + 0 = -3 + 0 = \boldsymbol{-3}$

De même, quand on calcule w_2, *on applique en fait la formule pour* $\mathrm{n} = 1$.

$\boldsymbol{w_2} = -w_1 + 1 = -(-3) + 1 = \boldsymbol{4}$.

$\boldsymbol{w_3} = -w_2 + 2 = -4 + 2 = \boldsymbol{2}$.

Exemple 3 *Pour calculer un terme, on a donc besoin ici des deux termes précédents.*

$\boldsymbol{u_2} = u_1 + u_0 = 1 + 1 = \boldsymbol{2}$.

$\boldsymbol{u_3} = u_2 + u_1 = 2 + 1 = \boldsymbol{3}$.

$\boldsymbol{u_4} = u_3 + u_2 = 3 + 2 = \boldsymbol{5}$.

$\boldsymbol{u_5} = u_4 + u_3 = 5 + 3 = \boldsymbol{8}$.

Plusieurs notions reliées à la suite de Fibonacci font de bons sujets de grand oral.

Exemple 4

• $\boldsymbol{a_1} = 2a_0 + b_0 = 2 \times 5 + 1 = \boldsymbol{11}$.

Pour calculer a_2, *on a besoin de connaître* b_1.

• $\boldsymbol{b_1} = 0{,}8a_0 - b_0 = 0{,}8 \times 5 - 1 = \boldsymbol{3}$.

• $\boldsymbol{a_2} = 2a_1 + b_1 = 2 \times 11 + 3 = \boldsymbol{25}$.

• $\boldsymbol{b_2} = 0{,}8a_1 - b_1 = 0{,}8 \times 11 - 3 = \boldsymbol{5{,}8}$.

Afficher une suite sous forme de graphique ou tableau (Numworks)

Dans l'écran d'accueil ⌂, choisir la fonction « Suites ».

Appuyer sur OK pour « Ajouter une suite », puis choisir le type de suite : explicite ou récurrente.

• Pour une suite **explicite**, taper ensuite l'expression en fonction de n.

La lettre n est affichée avec la touche cut x,n,t

```
u_n =
            Ajouter une suite
3/n +1|
```

• Pour une suite **récurrente**, taper la formule de récurrence (u_{n+1} en fonction de u_n)

Si vous voulez taper u_n, utilisez la touche « boîte à outils » paste

Ensuite, validez puis utilisez la croix directionnelle bas pour entrer u_0.

```
u_n+1 = u_n ×2+3
u_0 =
            Ajouter une suite
u_n ×2+3|
```

Une fois la suite entrée, utilisez la croix directionnelle haut pour **afficher un graphique ou un tableau**.

Afficher une suite sous forme de tableau (Casio)

Suites explicites

Appuyer sur la touche MENU

et choisir Récurrence

Appuyer sur F3 pour choisir le type de suite.

```
F1 : an =An+B
F2 : an+1 =Aan +Bn+C
F3 : an+2 =Aan+1 +Ban +···
```

Choisir F1 (a_n).

Entrer l'expression de a_n en fonction de n, en utilisant la touche F1 pour n.

```
Récurrence
an =2n+1          [—]
bn :              [—]
cn :              [—]
```

Appuyer sur F5 (SET) pour régler la table.

```
Réglage Table    n
 Start:0
 End  :9
```

Appuyer sur EXE pour valider.

Pour obtenir la table, appuyer sur F6.

n	an
0	1
1	3
2	5
3	7

Suites récurrentes

Appuyer sur la touche MENU

et choisir Récurrence

Appuyer sur F3 pour choisir le type de suite. Choisir F2 (a_{n+1}).

Entrer l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n, en utilisant la touche F1 pour n, F2 pour a_n.

```
Récurrence
an+1 =2an +1       [—]
bn+1 =bn +n+3      [—]
cn+1 :             [—]
```

Appuyer sur F5 (SET) pour régler la table et entrer la valeur du premier terme de chaque suite.

Pour obtenir la table, appuyer sur F6.

n+1	an+1	bn+1
0	1	2
1	3	5
2	7	9
3	15	14

Afficher une suite sous forme de tableau (TI)

Suites explicites

Appuyer sur la touche mode.

Choisir le mode **suite** ou **seq**.

Appuyer sur la touche f(x)

Choisir type suite (n)

Pour nmin : entrer l'indice du premier terme.

Pour $u(n)$: entrer l'expression de u_n en fonction de n à l'aide de la touche X,T,θ,n.

```
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)
nMin=0
\u(n)=2n+1
u(0)=
u(1)=
```

Pour régler la table, appuyer sur déf table (2nde fenêtre)

```
CONFIG TABLE
 DébutTbl=0
 ΔTbl=1
Indpnt  :  Auto Demande
Dépndte :  Auto Demande
```

Pour obtenir la table, appuyer sur 2nde graphe

n	u(n)
0	1
1	3
2	5
3	7

Suites récurrentes

Mettre la calculatrice en mode **suite**.

Appuyer sur la touche f(x)

Choisir type suite ($n+1$) et pour taper u ou v utiliser les touches 2nde, 7 ou, 8.

```
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)
nMin=0
\u(n+1)=2u(n)+1
u(0)=1
u(1)=
\v(n+1)=v(n)+n+3
v(0)=2
v(1)=
```

Pour régler la table, appuyer sur déf table fenêtre

Pour obtenir la table, appuyer sur table graphe

n	u	v
0	1	2
1	3	5
2	7	9
3	15	14

1b. Suites arithmétiques et géométriques

Définition : soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite (u_n) **arithmétique de raison r** est une suite définie par récurrence telle que pour $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$

Exemple 1 : soit (v_n) arithmétique de premier terme $v_0 = 7$ et de raison 5.

On a $v_1 =$ $v_2 =$ $v_3 =$ et $v_{10} =$

Propriété (formule du terme général) : soit (u_n) arithmétique de raison r. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$.

Exemple 2 : soit (w_n) arithmétique de premier terme $w_0 = 3$ et de raison -2.

On a $w_{20} =$ et $w_{350} =$

Les suites arithmétiques se représentent graphiquement par des points alignés.

On parle de croissance ou décroissance linéaire.

Exemple 1

$v_1 = v_0 + 5 = 7 + 5 = \mathbf{12}$; $v_2 = 12 + 5 = \mathbf{17}$ et $v_3 = 17 + 5 = \mathbf{22}$.

Pour v_{10}, on peut repartir de v_0 et ajouter 10 fois 5 : $v_{10} = 7 + 10 \times 5 = \mathbf{57}$.

C'est l'intérêt de la formule du terme général ci-après.

Exemple 2

$w_{20} = 3 + 20 \times (-2) = \mathbf{-57}$ et $w_{350} = 3 + 350 \times (-2) = \mathbf{-697}$.

Définition : soit $q \in \mathbb{R}$. Une suite (u_n) **géométrique de raison q** est une suite définie par récurrence telle que pour $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = qu_n}$

Exemple 1 soit (v_n) géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison – 2.

On a $v_1 =$ $v_2 =$ et $v_5 =$

Propriété (formule du terme général) : soit (u_n) géométrique de raison q. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$

Exemple 2 soit (w_n) de premier terme $w_0 = 24$ et de raison $-0{,}5$.On a

$w_1 =$ $w_2 =$ $w_5 =$ et $w_{20} =$

Exemple 3 Une ville comptait 5 000 habitants en 2017. Chaque année, le nombre d'habitants augmente de 8 % par rapport à l'année précédente. On note u_n le nombre d'habitants à l'année 2017 + n.

a. Donner la valeur de u_1 et u_2.

b. Justifier que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.

Les suites géométriques de raison positive se représentent graphiquement par des points placés comme pour une fonction exponentielle. On parle de croissance ou décroissance exponentielle.

Méthode : pour montrer qu'une suite est géométrique, il suffit de **factoriser $\boldsymbol{v_{n+1}}$ sous la forme $\boldsymbol{qv_n}$**.

Exemple 4 Soit (u_n), suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8 \end{cases}$ et (v_n) définie par $v_n = 6 - u_n$.

1. Calculer v_0 et v_1.

2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Exemple 1 $v_1 = v_0 \times (-2) = \mathbf{-6}$; $v_2 = (-6) \times (-2) = \mathbf{12}$.
Pour v_5, on repart de v_0 qu'on multiplie 5 fois par –2, ce qui revient à le multiplier par $(-2)^5$: $v_5 = 3 \times (-2)^5 = 3 \times (-32) = \mathbf{-96}$.
À nouveau, c'est pour ce genre de calcul qu'on a la formule du terme général.

Exemple 2 *On se rappelle que multiplier par 0,5 revient à diviser par 2.*
$w_1 = 24 \times (-0{,}5)^1 = \mathbf{-12}$ $w_2 = 24 \times (-0{,}5)^2 = \mathbf{6}$
$w_5 = 24 \times (-0{,}5)^5 = \mathbf{-0,75}$ $w_{20} = 24 \times (-0{,}5)^{20} \approx \mathbf{0,000\,023} \approx 2{,}3 \times 10^{-5}$

Exemple 3 **a.** Augmenter une quantité de 8% revient à la multiplier par $1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$. $u_1 = 5\,000 \times 1{,}08 = \mathbf{5\,400}$ et $u_2 = 5\,400 \times 1{,}08 = \mathbf{5\,832}$.
b. La suite (u_n) est géométrique car pour passer d'un terme au suivant, **on multiplie ce terme par $\mathbf{1,08}$**, qui est donc la raison. *Les suites géométriques servent souvent pour modéliser des augmentations/diminutions en pourcentage.*

Exemple 4 **1.** $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = \mathbf{4}$.
Pour calculer v_1, on a besoin de connaître $u_1 = 0{,}7u_0 + 1{,}8 = 3{,}2$.
Ainsi, $v_1 = 6 - u_1 = 6 - 3{,}2 = \mathbf{2,8}$.

2. *Cette méthode servira souvent par la suite !* Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons v_{n+1} :
$v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0{,}7u_n + 1{,}8) = 6 - 0{,}7u_n - 1{,}8 = 4{,}2 - 0{,}7u_n$
Or cette dernière quantité se factorise par 0,7 : $v_{n+1} = 0{,}7(6 - u_n) = \mathbf{0,7}\boldsymbol{v_n}$
Ainsi, (v_n) est géométrique, de raison $q = 0{,}7$.
3. D'après la formule du terme général, $v_n = v_0 q^n = \mathbf{6 \times 0,7}^{\boldsymbol{n}}$.

Définition : Le symbole $\sum$ représente une **somme de plusieurs nombres**.

Exemple 1 Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{4} (2k+1) \qquad B = \sum_{n=1}^{5} 3n^2$$

Exemple 2 Soit u_n suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$. On pose pour tout n entier naturel :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Calculer S_3.

Propriété : - Si (u_n) est une **suite arithmétique**, la somme des termes de u_0 à u_n vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

- Si (v_n) est une **suite géométrique de raison q**, la somme des termes de v_0 à v_n vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Dans les deux formules, $(\boldsymbol{n} + \mathbf{1})$ correspond au **nombre de termes ajoutés** : de u_0 à u_n, il y a $(n+1)$ termes.

Exemple 3 Un candidat se voit proposer deux offres d'emploi

- Entreprise A : son salaire annuel est de 22 000€ la 1ère année, puis il augmente de 1 000€ chaque année.
- Entreprise B : son salaire annuel est de 20 000€ la 1ère année, puis il augmente de 4% chaque année.

Quel est le salaire le plus avantageux au bout de dix ans ?

Exemple 1 *Nous verrons des formules pour calculer ces sommes très rapidement.*

$A = (2 \times 0 + 1) + (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1) + (2 \times 4 + 1)$

$A = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \mathbf{25}$

$B = 3 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + 3 \times 5^2$

$B = 3 + 12 + 27 + 48 + 75 = \mathbf{165}$

Exemple 2

$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.

Or $u_0 = 10; u_1 = 2 \times 10 - 3 = 17; u_2 = 2 \times 17 - 3 = 31; u_3 = 2 \times 31 - 3 = 59$

Donc $S_3 = 10 + 17 + 31 + 59 = \mathbf{117}$.

Exemple 3

- On modélise le salaire de l'entreprise A par la suite arithmétique (a_n) de premier terme $a_0 = 22\,000$ et de raison $r = 1\,000$.

On a alors $a_9 = 22\,000 + 1\,000 \times 9 = 31\,000$. *C'est le salaire de la dixième année, on en a besoin pour la formule de la somme d'une suite arithmétique.*

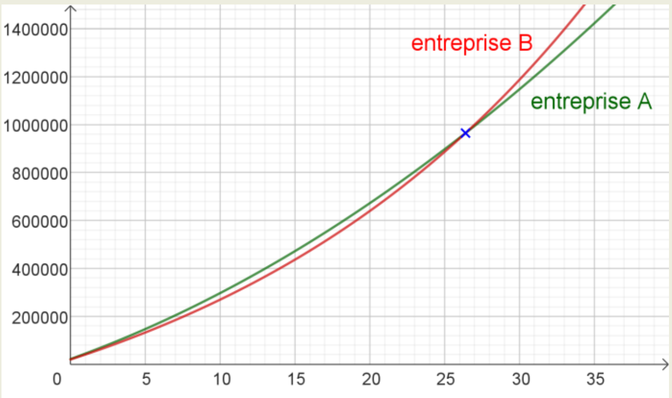
Ainsi, la somme des salaires des dix premières années est :

$$\sum_{k=0}^{9} a_k = 10 \times \frac{a_0 + a_9}{2} = \mathbf{265\,000€}$$

• De même, on modélise le salaire de l'entreprise B par la suite géométrique (b_n) de premier terme $b_0 = 20\,000$ et de raison $q = 1{,}04$.
La somme des salaires des dix premières années est :

$$\sum_{k=0}^{9} b_k = 20\,000 \times \frac{1 - 1{,}04^{10}}{1 - 1{,}04} \approx \mathbf{240\,122€}$$

L'entreprise A est la plus avantageuse. *Il faut en fait 27 ans pour que l'entreprise B batte enfin l'entreprise A grâce à sa croissance exponentielle. L'écart se creuse ensuite, comme on peut le voir sur ce graphique.*



1c. Sens de variation

Définitions : une suite (u_n) est :
- **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} \geq u_n}$ *(strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$)*
- **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$ *(strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$)*

Propriété : une suite (u_n) est **croissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0}$
(décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

Exemple 1 Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 2n$
et de la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{4}{n+1}$

Propriété : Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont strictement positifs.
(u_n) est **croissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1}$ *(décroissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$)*

Exemple 2 Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour $n > 3$ par $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1}$

Propriétés :
- Une suite **arithmétique** est croissante si et seulement si sa raison est **positive**.
- Une suite **géométrique** dont le premier terme est positif est :
croissante si et seulement si sa raison est **supérieure à 1**,
décroissante si sa raison est **comprise entre 0 et 1**.

Exemple 3 Étudier le sens de variation des suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$a_n = 5 - 2n$ $\qquad$ $b_n = 7{,}1 \times 0{,}6^n$ $\qquad$ $c_n = -3 \times 5^n$

Exemple 1

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \left((n+1)^2 + 2(n+1)\right) - (n^2 + 2n)$
$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n$
$= \boldsymbol{2n + 3}$
Or n est positif, donc $2n + 3$ l'est aussi, et (u_n) est **croissante**.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. *Notez que si on remplace* n *par* $(\mathrm{n}+1)$, $(\mathrm{n}+1)$ *devient alors* $(\mathrm{n}+2)$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4}{n+2} - \frac{4}{n+1} = \frac{4(n+1) - 4(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{4n + 4 - 4n - 8}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-4}{(n+2)(n+1)}}$$

Or le numérateur de cette fraction est négatif, mais son dénominateur est positif.
$v_{n+1} - v_n$ est donc négatif et la suite (v_n) est **décroissante**.

Exemple 2 *Cette propriété sert peu et donne des calculs désagréables.* Pour $n > 3$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{n+1-3}{2(n+1)+1}}{\dfrac{n-3}{2n+1}} = \frac{\dfrac{n-2}{2n+3}}{\dfrac{n-3}{2n+1}} = \frac{n-2}{2n+3} \times \frac{2n+1}{n-3} = \boldsymbol{\frac{2n^2 - 3n - 2}{2n^2 - 3n - 9}}$$

Or dans cette dernière fraction, le numérateur est inférieur au dénominateur, donc cette fraction est inférieure à 1 et donc (u_n) est **décroissante**.

Exemple 3

• (a_n) est une suite **arithmétique** de raison -2, qui est **négatif**.
Donc elle est **décroissante**.

• (b_n) est une suite **géométrique** de premier terme positif et de raison 0,6, qui est **comprise entre 0 et 1**. Donc elle est **décroissante**.

• La suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par 3×5^n est **géométrique** de premier terme positif et de raison 5, qui est **supérieure à 1**. Donc elle est **croissante**.
La suite (c_n) définie par -3×5^n est son opposée. Donc (c_n) est **décroissante**.

2. Raisonnement par récurrence

2a. Principe de récurrence

Propriété : Si une propriété est vraie pour un entier n_0,
et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier n supérieur ou égal à n_0, alors elle est vraie pour l'entier $n + 1$,
alors la propriété est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0.

En mathématiques, **de nombreuses propriétés dépendent de la valeur d'un nombre entier, souvent noté n.**

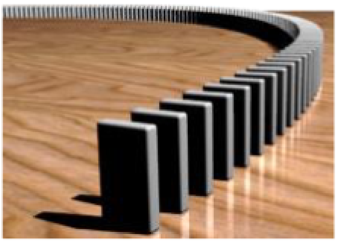
Par exemple : « *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des nombres de 1 à n est égale à* $\frac{n(n+1)}{2}$ »

On peut le vérifier facilement pour une valeur de n donnée :

si $n = 7$, on calcule $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, qui est bien égal à $\frac{7\times 8}{2}$.

Mais comment le prouver pour toute valeur de n ?

Le **raisonnement par récurrence** est une méthode de démonstration, probablement utilisée par des mathématiciens anciens tels qu'Euclide.
Mais le premier à l'avoir formalisée est Blaise Pascal, au XVII^e siècle, afin de justifier les formules qui nous permettront de remplir le triangle de Pascal, plus tard dans l'année.
On peut s'en servir pour montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers, pour étudier des suites… en fait, dès qu'on doit démontrer une propriété avec des nombres entiers, la récurrence se révèle très utile.



Il repose sur un principe simple : si la propriété **est vraie pour $n = 0$**, et que si **sa véracité pour un entier n implique sa véracité pour l'entier $(n + 1)$**, alors la propriété est vraie pour **tous les entiers**.
On peut comparer ce principe à un **enchaînement de dominos** : si le premier domino (de rang 0) tombe, et si on est sûr que chaque domino fera tomber le domino suivant, alors tous les dominos tomberont.

2b. Méthode

Soit $P(n)$ une propriété à montrer, dépendant d'un entier n.

Par exemple, $P(n)$: « *la somme des nombres de 1 à n est égale à* $\frac{n(n+1)}{2}$ »

1. <u>Initialisation</u> : on montre que la propriété est **vraie au premier rang**.
C'est souvent très facile, mais à ne pas oublier !

2. <u>Hérédité</u> : on se donne un entier $n \in \mathbb{N}$, on suppose que **la propriété est vraie à un rang $\boldsymbol{n}$**, et on montre qu'elle est **alors vraie au rang suivant** $(\boldsymbol{n+1})$.
En langage mathématique, cela s'écrit $\boldsymbol{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

3. <u>Conclusion</u> : on en déduit que la propriété est toujours vraie.

Exemple 1 Montrer l'inégalité de Bernoulli : pour tout $a \in \mathbb{R}$ strictement positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

Exemple 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, la somme des nombres de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Attention ! Dans la rédaction, $\boldsymbol{P(n)}$ *ou bien* $P(n+1)$ *ou* $P(0)$ ***ne représentent pas des nombres****. Ils représentent des énoncés logiques, comme par exemple* $P(0)$ *qui représente « la propriété pour* $n=0$ *».*

Exemple 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons $P(n)$: « $(1+a)^n \geq 1+na$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : Montrons $P(0)$: « $(1+a)^0 \geq 1+0\times a$ »
On calcule les deux membres de l'inégalité :
•$(1+a)^0 = 1$, car tout nombre à la puissance 0 vaut 1.
• $1+0\times a = 1$.
Ainsi, $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: « $(1+a)^n \geq 1+na$ » est vraie.
Montrons que $P(n+1)$: « $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$ » est alors vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence :
$(1+a)^n \geq 1+na$
On part de cette inégalité, et on essaye progressivement d'aboutir à $(1+a)^{n+1}$.
$(1+a)$ *étant positif, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité par* $(1+a)$.
$\Leftrightarrow (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$
Rappel de formules sur les puissances : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n \times x = x^{n+1}$.
$\Leftrightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$
$\Leftrightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2$
On a presque trouvé ce que l'on cherchait, mais il reste ce na^2 *qui nous embête…*
Mais un carré étant toujours positif, $na^2 \geq 0$*, donc le* $1+(n+1)a+na^2$ *qu'on a trouvé est supérieur au* $1+(n+1)a$.
$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$
On a montré que $P(n+1)$ était vraie.

<u>Conclusion</u> : pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Exemple 2 *Ici, l'initialisation se fait pour* $\mathrm{n} = 1$ *: cette propriété n'a pas de sens pour* $\mathrm{n} = 0$*.*

Montrons $P(n)$: « $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul.

<u>Initialisation</u> : Montrons $P(1)$: « $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ »

Or $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: « $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ » est vraie.

Montrons que $P(n+1)$: « $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ » est alors vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

On peut mettre cette expression au même dénominateur :

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

Pour terminer, on factorise par $(\mathrm{n} + 1)$*.*

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

On a montré que $P(n+1)$ était vraie : $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2c. Établir des formules

Exemple 1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.

Exemple 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Remarque : on aurait aussi pu écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exemple 1

Ici, il faut bien différencier $\mathbf{u_n = 2 \times 3^n + 1}$*, qui est la propriété à démontrer, de* $\mathbf{u_{n+1} = 3u_n - 2}$*, qui est la formule de récurrence que l'on peut utiliser.*

Montrons $P(n)$: « $u_n = 2 \times 3^n + 1$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Montrons $P(0)$: « $u_0 = 2 \times 3^0 + 1$ »

Or $2 \times 3^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$, qui est bien égal à u_0.

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: « $u_n = 2 \times 3^n + 1$ » est vraie.

Montrons que $P(n+1)$: « $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} + 1$ » est alors vraie.

Calculons u_{n+1}. D'après la formule de récurrence :

$u_{n+1} = 3\boldsymbol{u_n} - 2$

Or d'après l'hypothèse de récurrence :

$u_{n+1} = 3(\mathbf{2 \times 3^n + 1}) - 2$

On développe le 3. Attention, la parenthèse ne contient que deux termes, qui sont 2×3^n et 1. On ne distribue pas le facteur commun à 2 et à 3^n !

$u_{n+1} = 3 \times 2 \times 3^n + 3 \times 1 - 2$

On utilise le fait qu'une suite de multiplications peut se réécrire dans l'ordre de notre choix.

$u_{n+1} = 2 \times 3 \times 3^n + 3 \times 1 - 2$

Enfin, on utilise les règles de calculs sur les puissances : $3 \times 3^n = 3^1 \times 3^n = 3^{n+1}$

$u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} + 1$

On a montré que $P(n+1)$ était vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.

Exemple 2

Montrons $P(n)$: « $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

<u>Initialisation</u> : Montrons $P(1)$: « $1^2=\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$ »

Or $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=\frac{6}{6}=1$. Donc $P(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n\in\mathbb{N}$.

Supposons que $P(n)$: « $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » est vraie.

Il est plus difficile ici de remplacer tous les n *par des* $(\mathrm{n}+1)$*.*

$\mathrm{n}+1$ *devient alors* $(\mathrm{n}+1)+1$, *soit* $\mathrm{n}+2$.

Quand à $2\mathrm{n}+1$, *il devient* $2(\mathrm{n}+1)+1=2\mathrm{n}+2+1=2\mathrm{n}+3$.

Montrons $P(n+1)$: « $1^2+2^2+\cdots+n^2+(\mathrm{n}+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ».

Calculons avec l'hypothèse de récurrence :

$1^2+2^2+\cdots+n^2+(\mathrm{n}+1)^2$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(\mathrm{n}+1)^2$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(\mathrm{n}+1)^2}{6}$

On peut additionner les deux fractions et factoriser par $(\mathrm{n}+1)$*.*

$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$=\frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}$

On essaye de développer le contenu de la grosse parenthèse.

$=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$

$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Zut. On voulait trouver $\frac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)(2\mathrm{n}+3)}{6}$. *On a* $\frac{(\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}^2+7\mathrm{n}+6)}{6}$.

Une autre technique peut nous aider : essayer de repartir de $(\mathrm{n}+2)(2\mathrm{n}+3)$ *et montrer que cette expression est égale au* $(2\mathrm{n}^2+7\mathrm{n}+6)$ *qu'on a trouvé.*

Or pour $\mathrm{n}\in\mathbb{N}^*$, $(n+2)(2n+3)=2n^2+3n+4n+6=2n^2+7n+6$.

Ainsi, $1^2+2^2+\cdots+n^2+(\mathrm{n}+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ et $P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2d. Inégalités

Exemple 1 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 6$.
Montrer que la suite (v_n) est strictement décroissante.

Rappel : Soient a et b deux nombres réels tels que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$. Soit f une fonction définie sur $[a; b]$.
- si f est strictement **croissante sur** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, alors $\boldsymbol{f(a)} < \boldsymbol{f(b)}$.
- si f est strictement **décroissante sur** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, alors $\boldsymbol{f(a)} > \boldsymbol{f(b)}$.

Exemple 2 Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \end{cases}$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.

Exemple 3 a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]-3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{7x+1}{6+2x}$
b. On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, $a_{n+1} = \frac{7a_n+1}{6+2a_n}$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, on a $1 \leq a_{n+1} \leq a_n$.

Exemple 1 Montrons $P(n)$: « $v_n > v_{n+1}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Montrons $P(0)$: « $v_0 > v_1$ ».
On a $v_0 = 2$ et $v_1 = 2 \times 2 - 6 = -2$. Donc $v_0 > v_1$ et $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: « $v_n > v_{n+1}$ » est vraie.
Montrons que $P(n+1)$: « $v_{n+1} > v_{n+2}$ » est alors vraie.
On part de l'hypothèse de récurrence :
$v_n > v_{n+1}$
Ici, on va essayer d'appliquer les opérations qui permettent de passer de v_n à v_{n+1}, une par une, dans l'ordre des priorités opératoires.
Si on fait de même pour v_{n+1}, on trouvera v_{n+2}.
$\Leftrightarrow 2v_n > 2v_{n+1}$
$\Leftrightarrow 2v_n - 6 > 2v_{n+1} - 6$
$\Leftrightarrow v_{n+1} > v_{n+2}$
On fait bien attention à retrouver, à la fin, le sens de l'inégalité initiale (pour rappel, multiplier/diviser par un nombre négatif ou changer le signe des membres change le sens des inégalités).
On a montré que $P(n+1)$ était vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > v_{n+1}$ et la suite (v_n) est décroissante.

Exemple 2 Montrons $P(n)$: « $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Montrons $P(0)$: « $2{,}5 \leq u_1 \leq u_0 \leq 10$ ».
On a $u_0 = 10$, et $u_1 = \sqrt{u_0 + 5} = \sqrt{15} \approx 3{,}87$.
Ainsi, $2{,}5 \leq u_1 \leq u_0 \leq 10$ et $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$: « $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$ »
Montrons que $P(n+1)$: « $2{,}5 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 10$ » est alors vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :
$2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$
$\Leftrightarrow 2{,}5 + 5 \leq u_{n+1} + 5 \leq u_n + 5 \leq 10 + 5$
$\Leftrightarrow 7{,}5 \leq u_{n+1} + 5 \leq u_n + 5 \leq 15$
$\Leftrightarrow \sqrt{7{,}5} \leq \sqrt{u_{n+1} + 5} \leq \sqrt{u_n + 5} \leq \sqrt{15}$
car la fonction racine carrée est croissante
$\Leftrightarrow \sqrt{7{,}5} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{15}$
Zut, on voulait retrouver $2{,}5$ *et* 10*, mais on a trouvé* $\sqrt{7{,}5}$ *et* $\sqrt{15}$ *à la place.*
Cela dit, on peut calculer $\sqrt{7{,}5}$ *: si on trouve un résultat plus grand que* $2{,}5$*, cela signifie que* $\mathrm{u}_{\mathrm{n}+2}$ *est plus grand qu'un nombre plus grand que 2,5. On aura bien* $2{,}5 \leq \mathrm{u}_{\mathrm{n}+2}$ *comme on voulait. Idem pour* $\sqrt{15}$ *: il faudrait qu'il soit inférieur à 10.*
Or $\sqrt{7{,}5} \approx 2{,}73 > 2{,}5$ et $\sqrt{15} \approx 3{,}87 < 10$.
On en déduit que $2{,}5 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 10$ et $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.

Exemple 3 a. Déterminons la dérivée de la fonction f, qui est de la forme $\frac{u}{v}$.
Pour $x > -3$, on pose $u(x) = 7x + 1$ et $v(x) = 6 + 2x$.
On a alors $u'(x) = 7$ et $v'(x) = 2$. Ainsi :
$$f'(x) = \frac{7(6+2x) - (7x+1) \times 2}{(6+2x)^2} = \frac{42 + 14x - 14x - 2}{(6+2x)^2} = \frac{40}{(6+2x)^2}$$
Or 40 est positif, et $(6+2x)^2$ est positif car il s'agit d'un carré.
La dérivée de f est donc positive sur $]-3; +\infty[$. f est donc croissante.
b. La suite (a_n) vérifie la formule de récurrence $\boldsymbol{a_{n+1} = f(a_n)}$.
Montrons $P(n)$: « $1 \leq a_{n+1} \leq a_n$ » pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Montrons $P(1)$: « $1 \leq a_2 \leq a_1$ ».
$a_1 = 4$ et $a_2 = \frac{7\times4+1}{6+2\times4} = \frac{29}{14}$. On a bien $1 \leq a_2 \leq a_1$ et $P(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$: « $1 \leq a_{n+1} \leq a_n$ » est vraie.
Montrons que $P(n+1)$: « $1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$ » est alors vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence : $1 \leq a_{n+1} \leq a_n$
Or f est croissante : on peut l'appliquer à tous les membres de l'inégalité.
$f(1) \leq f(a_{n+1}) \leq f(a_n)$
Mais $f(1) = \frac{7\times1+1}{6+2\times1} = \frac{8}{8} = 1$, $f(a_{n+1}) = a_{n+2}$ et $f(a_n) = a_{n+1}$.
Ainsi, $1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$. $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_{n+1} \leq a_n$.
Quand, comme ici, on a affaire à une suite dont la formule de récurrence fait intervenir une fonction croissante, il est infiniment plus facile d'appliquer cette fonction plutôt que d'essayer d'appliquer les opérations une par une comme dans les exemples 1 et 2.

2e. Autres usages

Exemple 1	Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise $5^n - 1$.
Exemple 2	**a.** Dresser le tableau de signes de $2x^2 - (x+1)^2$ **b.** Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$
Exemple 3	**a.** Montrer que la propriété « pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2^n est un multiple de 3 » est bien héréditaire. **b.** Pourtant, cette propriété est-elle vraie ?

Exemple 1 Montrons $P(n)$: « $5^{\mathrm{n}} - 1$ est multiple de 4 » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $n = 0$, $5^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, qui est bien un multiple de 4.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$: « $5^{\mathrm{n}} - 1$ est multiple de 4 ».
Montrons que $P(n+1)$: « $5^{\mathrm{n}+1} - 1$ est multiple de 4 » est vraie.
Par hypothèse de récurrence, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $5^n - 1 = 4k$.
En multipliant cette égalité par 5, on obtient :
$5(5^n - 1) = 5 \times 4k$
$\Leftrightarrow 5^{n+1} - 5 = 4 \times 5k$
$\Leftrightarrow 5^{n+1} - 1 - 4 = 4 \times 5k$
$\Leftrightarrow 5^{n+1} - 1 = 4 \times 5k + 4$
$\Leftrightarrow 5^{n+1} - 1 = 4(5k + 1)$
On a montré que $5^{n+1} - 1$ est bien multiple de 4. $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{\mathrm{n}} - 1$ est multiple de 4.

Exemple 2
a. $2x^2 - (x+1)^2 = 2x^2 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 - 2x - 1$.
Ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$
Il admet deux racines réelles, $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times1} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$
et $x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times1} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$
De plus, le coefficient en x^2 de $x^2 - 2x - 1$ est positif.
Ainsi $2x - (x+1)^2$ est positif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et négatif sur $[x_1; x_2]$.
b. Montrons $P(n)$: « $2^n \geq n^2$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$ supérieur à 4.
Initialisation : pour $n = 4$, $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ et $4^2 = 4 \times 4 = 16$.
$P(4)$ est vraie.
Hérédité : soir $n \geq 4$, supposons $P(n)$: « $2^n \geq n^2$ ».
Montrons $P(n+1)$: « $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ ». On part de l'hypothèse de récurrence :
$2^n \geq n^2 \Leftrightarrow 2 \times 2^n \geq 2n^2 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2$
Or d'après la question **a**, pour $n \geq 1 + \sqrt{2}$ (ce qui est le cas ici), $2n^2 - (n+1)^2$ est positif : cela signifie que $2n^2$ est supérieur à $(n+1)^2$.
Ainsi, $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ et $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour $n \in \mathbb{N}$, on a bien $2^n \geq n^2$.
Exemple 3 *Cet exemple permet de voir en quoi l'initialisation est indispensable : si*

on l'ignore, on peut démontrer des propriétés qui sont manifestement fausses.

a. <u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$: « 2^{n} est multiple de 3 ».
Montrons que $P(n+1)$: « $2^{\mathrm{n+1}}$ est multiple de 3 » est vraie.
Par hypothèse de récurrence, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^n = 3k$.
En multipliant par 2, on trouve $2 \times 2^n = 2 \times 3k \Leftrightarrow 2^{n+1} = 3 \times 2k$
On vient de montrer que 2^{n+1} est également multiple de 3. $P(n+1)$ est vraie.
b. Pourtant, aucune puissance de 2 n'est en réalité multiple de 3 : $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$…

3. Notion de limite

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

3a. Limite infinie

Définition : (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$,
si pour tout réel A, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) diverge, et on note :

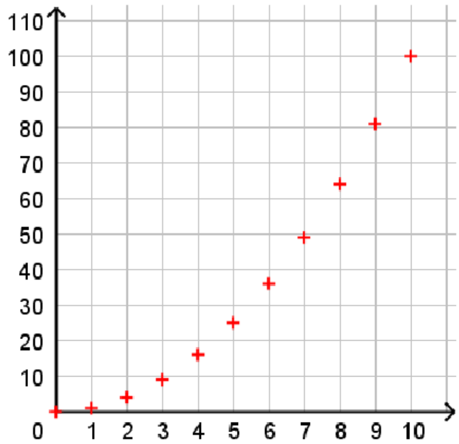
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Cette définition signifie que **quelque soit le nombre réel A qu'on choisisse**, même très grand, à partir d'un certain rang, la suite (u_n) finira par **prendre des valeurs au-dessus de A et ne repassera jamais en-dessous**.

Cela ne signifie pas forcément qu'elle est tout le temps croissante (même si c'est souvent le cas), mais la suite (u_n) finira par atteindre des valeurs infiniment grandes.

Exemple Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$:

- si $A = 10$, l'intervalle $]10;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang ….. . En particulier, $u_{...} =$ ……..
- si $A = 100$, l'intervalle $]100;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang ….. . En particulier, $u_{...} =$ ……..
- si $A = 100\,000$, l'intervalle $]100\,000;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang ….. . En particulier, $u_{...} =$ ……..

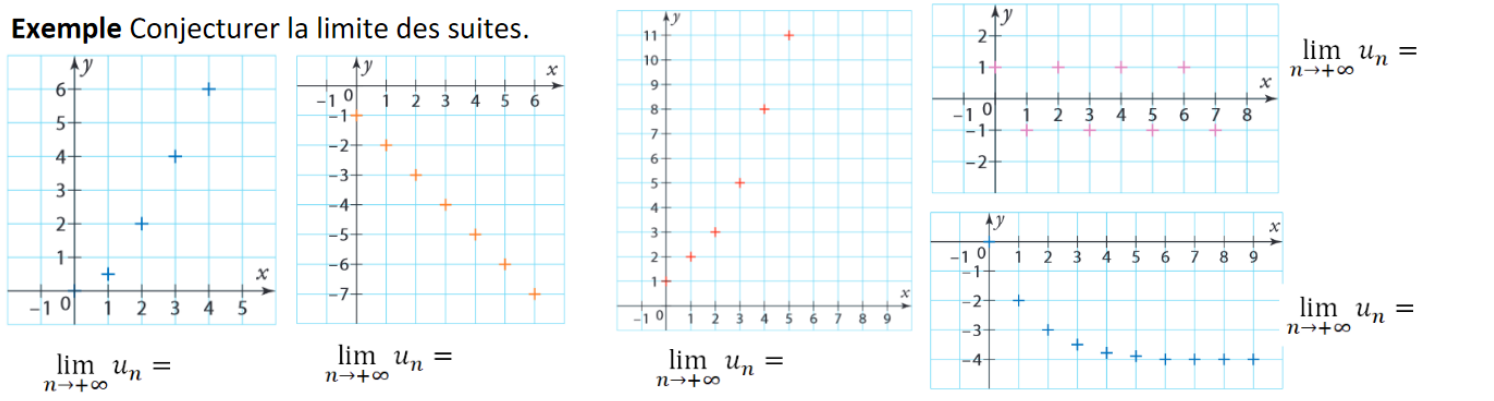


- L'intervalle $]10;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang 4. En particulier, $u_4 = 16$.
- L'intervalle $]100;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang 11. En particulier, $u_{11} = 121$.
- L'intervalle $]1\,000;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang 32. En particulier, $u_{32} = 1\,024$.

Définition : (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$,
si pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) diverge, et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Exemple Conjecturer la limite des suites.



De gauche à droite et de haut en bas : $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$; pas de limite, et… -4 ?

3b. Limite finie

Définition : (u_n) tend vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$,
si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) converge vers ℓ, et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

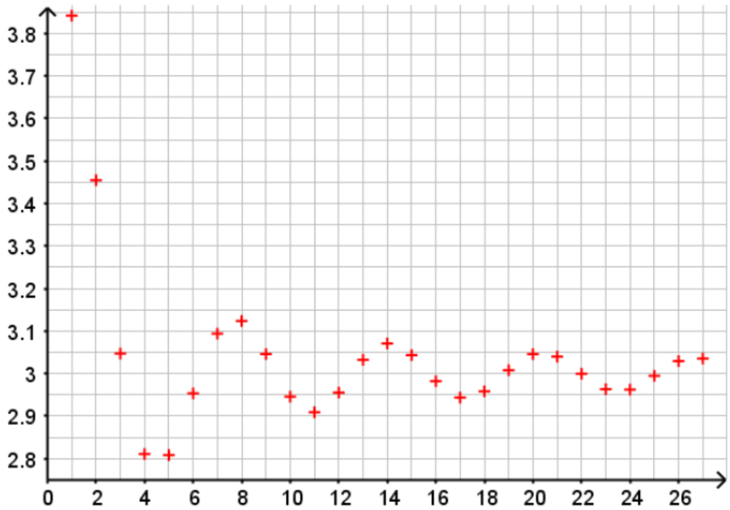
Cette définition signifie que **quelque soit l'amplitude ε qu'on choisisse**, même très petite, à partir d'un certain rang, les valeurs de la suite (u_n) seront **au plus à une distance ε de la limite ℓ et ne s'en éloigneront plus.**

Considérons la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n} + 3$. On peut conjecturer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

• si $\varepsilon = 0{,}5$, l'intervalle $]\,\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang .....

• si $\varepsilon = 0{,}1$, l'intervalle $]\,\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang .....

• si $\varepsilon = 0{,}05$, l'intervalle $]\,\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang .....



Finalement, même si on prend un ε très petit, on pourra trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont contenus dans un intervalle $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ et n'en sortiront plus.

Cela implique aussi qu'on peut trouver des termes de la suite aussi proches que l'on veut de ℓ.

• L'intervalle $]2{,}5; 3{,}5[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang 2.
• L'intervalle $]2{,}9; 3{,}1[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang 9.
• L'intervalle $]2{,}95; 3{,}05[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang 18.

3c. Premières conjectures

Exemple 1 Dans chaque cas, conjecturer la limite de la suite (u_n) dont on donne le terme général.
Vous pouvez utiliser la calculatrice pour afficher les termes de la suite dans un graphique, ou regarder le tableau de valeurs.

a. $\frac{1}{n}$ **b.** n^3 **c.** $n+4$ **d.** $\frac{3}{n}+7$ **e.** $\sqrt{n}$ **f.** $\frac{1}{n^2}$ **g.** $\frac{2n}{n+1}$

Exemple 2 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 5$.
a. Pour tout réel $A > 0$, déterminer le plus petit entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n < -A$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exemple 3 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 + 0{,}7^n$.
1. Conjecturer la limite de la suite(u_n)
2. Justifier que pour tout pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
3. On admet que la suite (u_n) est strictement décroissante. A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que : **a.** $u_n < 2{,}1$ **b.** $u_n < 2{,}01$ **c.** $u_n < 2{,}001$

Exemple 1 *On représente les suites à la calculatrice.*
a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** $+\infty$ **d.** 7 **e.** $+\infty$ **f.** 0 **g.** 2

Exemple 2 *C'est une façon alambiquée de calculer la limite d'une suite, nous verrons des méthodes plus faciles ensuite.*
a. $u_n < -A \Leftrightarrow -n^2 + 5 < -A \Leftrightarrow -n^2 < -A - 5 \Leftrightarrow n^2 > A + 5 \Leftrightarrow n > \sqrt{A+5}$
Ainsi, en prenant n_0 comme la valeur approchée par excès de $\sqrt{A+5}$, pour tout $n \geq n_0$, on a bien $u_n < -A$.
b. On a montré à la question **a** que pour tout réel A, il existe un rang n_0 tel qu'à partir de ce rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]-\infty; A[$.
Cela correspond à la définition du cours, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemple 3 1. La calculatrice nous permet de conjecturer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.
2. 0,7 est strictement positif, donc $0{,}7^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi $u_n > 2$.
3a. $n = 7$ **3b.** $n = 13$ **3c.** $n = 20$

Propriété : si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

Exemple 1 Représenter graphiquement à la calculatrice la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.
Cette suite est-elle convergente ?

Exemple 2 Même question avec **a.** la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \cos(n)$.
b. la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 3 + (-0{,}4)^n$.

Exemple 1 Cette suite alterne entre -1 et 1. Elle ne peut pas avoir de limite.

Exemple 2 Cette suite prend différentes valeurs sans se rapprocher d'une valeur en particulier. Elle ne peut pas avoir de limite.

Exemple 3 Bien que cette suite alterne entre valeurs positives et négatives, ses valeurs se rapprochent de 3 quand $n \to +\infty$. Sa limite est 3.

4. Calculer des limites

4a. Suites usuelles

u_n	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
n	$+\infty$
n^2	$+\infty$
n^k (k entier positif $\neq 0$)	$+\infty$
e^n	$+\infty$
$\sqrt{n}$	$+\infty$
$\dfrac{1}{n}$	0^+ (0 par valeurs positives)
$\dfrac{1}{n^k}$ (k entier positif $\neq 0$)	0^+
$\sin(n)$ ou $\cos(n)$	pas de limite

4b. Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

si (u_n) a pour limite …	et (v_n) a pour limite …	alors $(u_n + v_n)$ a pour limite …
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**indéterminée** (cas « $\infty - \infty$ »)

si (u_n) a pour limite …	et (v_n) a pour limite …	alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite …
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ suivant le signe de ℓ et $\pm\infty$
0	$\pm\infty$	**indéterminée** (cas « $0 \times \infty$ »)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

si (u_n) a pour limite …	et (v_n) a pour limite …	alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite …
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$\ell \neq 0$	0^+	$\pm\infty$ suivant le signe de ℓ
$\ell \neq 0$	0^-	$\pm\infty$ suivant le signe de $-\ell$
0	**0**	**indéterminée** (cas « $\frac{0}{0}$ »)
$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$ suivant le signe de ℓ et $\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**indéterminée** (cas « $\frac{\infty}{\infty}$ »)

• Les cas d'**indétermination** ne signifient pas forcément qu'il n'y a pas de limite, mais plutôt que la limite ne peut pas être trouvée avec ce tableau. Il faut alors **exprimer la suite sous une autre forme** (par exemple en factorisant).

Les explications écrites entre guillemets servent de rappel mais ne sont pas valides en mathématiques. Ne pas les écrire sur une copie.

• 0^+ représente les suites qui tendent **vers 0 en prenant des valeurs positives** (ex : $u_n = \frac{1}{n}$). Idem pour 0^- (ex : $v_n = -\frac{1}{n^2}$).

Exemple 1 *(Opérations sur les limites)* Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

$\boldsymbol{a}.\ u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ $\boldsymbol{b}.\ u_n = -5\sqrt{n} - n^3$ $\boldsymbol{c}.\ u_n = \dfrac{2}{3n+5}$ $\boldsymbol{d}.\ u_n = n^2 + n - 5$

$\boldsymbol{e}.\ u_n = \dfrac{1}{n^2} - 10$ $\boldsymbol{f}.\ u_n = -\dfrac{1}{5-2n}$ $\boldsymbol{g}.\ u_n = \dfrac{3}{1+\frac{1}{n}}$

Exemple 2 *(Formes indéterminées)* Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

a. Déterminer la limite des suites (u_n) définie par $u_n = n^2 - n$ et (v_n) définie par $v_n = \dfrac{4n^2}{n+1}$

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 + 2n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 3n + 1$

c. Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n) définies ci-dessous :

$$u_n = \frac{3n+1}{5n-2} \qquad v_n = \frac{2n}{1-n^2}$$

Exemple 1 *À chaque fois, on se réfère aux limites des suites usuelles, puis au tableau pour connaître la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.*

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n} = -\infty$.
- De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.

Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

c.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n + 5 = +\infty$.

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -10 = -10$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -10$.

f.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 = -1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - 2n = -\infty$.

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.

g.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0^+$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$.

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exemple 2 *La rédaction de ces exemples détaille la raison pour laquelle les formes sont indéterminées, mais on n'a en général pas besoin de détailler ça.*

a. $\boldsymbol{u_n = n^2 - n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$. Par somme, c'est une forme indéterminée…

Mais $u_n = n^2 - n = n(n-1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\boldsymbol{v_n = \frac{4n^2}{n+1}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$. Par quotient, c'est une forme indéterminée.

Mais $v_n = \frac{4n^2}{n+1} = \frac{n\times 4n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{4n}{1+\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

b. $\boldsymbol{-n^3 + 2n^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$. Par somme, c'est une forme indéterminée…

Mais $-n^3 + 2n^2 = n^2(-n+2)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+2 = -\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 + 2n^2 = -\infty$.

$\boldsymbol{n^2 - 3n + 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Par somme, c'est une forme indéterminée.

Mais $n^2 - 3n + 1 = n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{3}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 3n + 1 = +\infty$.

c. $\boldsymbol{u_n = \frac{3n+1}{5n-2}}$ est une forme indéterminée par quotient.

Mais $u_n = \frac{3n+1}{5n-2} = \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(5-\frac{2}{n}\right)} = \frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-\frac{2}{n} = 5$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5}$.

$\boldsymbol{v_n = \frac{2n}{1-n^2}}$ est une forme indéterminée par quotient.

Mais $u_n = \frac{2n}{1-n^2} = \frac{n\times 2}{n\left(\frac{1}{n}-n\right)} = \frac{2}{\frac{1}{n}-n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - n = -\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4c. Suites géométriques

Propriété (suites géométriques) : Soit q un nombre réel, et (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.
- si $q > 1$, la suite diverge vers $+\infty$
- si $q = 1$, la suite est constante égale à 1, sa limite est donc 1.
- si $-1 < q < 1$, la suite converge vers 0
- si $q \leq -1$, la suite diverge (elle prend alternativement des valeurs positives et négatives)

Exemple Donner la limite des suites suivantes :

a. La suite (u_n) géométrique, de premier terme $u_0 = -4$ et de raison $\frac{3}{2}$

b. La suite (v_n) géométrique, de premier terme $v_0 = 7$ et de raison $-0{,}4$

c. La suite (w_n) géométrique, de premier terme $w_0 = 10$ et de raison -2

d. La suite (a_n) définie par $a_n = 1{,}8 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n$

a. La suite (u_n) a pour expression $u_n = -4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 = -4$ et d'après la propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\frac{3}{2} > 1$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b. La suite (v_n) a pour expression $v_n = 7 \times (-0{,}4)^n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 7 = 7$ et d'après la propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}4)^n = 0$ car $-1 < -0{,}4 < 1$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c. La suite (w_n) a pour expression $w_n = 10 \times (-2)^n$.

Or d'après la propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$ n'existe pas. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ n'existe pas.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}8 = 1{,}8$ et d'après la propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{5}{7} < 1$.

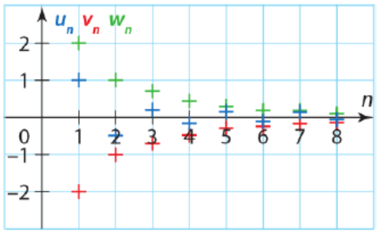
Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

5. Théorèmes sur les limites

5a. Comparaison et gendarmes

Thèorème (de comparaison) : Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $\boldsymbol{v_n \leq u_n}$. Alors :
• Si (u_n) et (v_n) convergent, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
• Si on a plutôt $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. • Inversement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Thèorème (des gendarmes) : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ un réel.
On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$,
on a $\boldsymbol{v_n \leq u_n \leq w_n}$, et on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \boldsymbol{\ell}$.
Alors la suite $(\boldsymbol{u_n})$ **converge aussi vers $\boldsymbol{\ell}$.**



si (v_n) et (w_n) tendent vers 0, la suite (u_n), dont les valeurs sont comprises entre celles de (v_n) et et (w_n), tend également vers 0.

Remarque : si une suite (u_n) croissante et une suite (v_n) décroissante ont leur différence $u_n - v_n$ qui tend vers 0, alors elles convergent vers la même limite. On dit alors que ce sont des **suites adjacentes**.

Exemple 1 *(Théorème de comparaison)*
Déterminer les limites des suites (u_n) définies par : **a.** $u_n = -n^2 - n + (-1)^n$ **b.** $u_n = \sqrt{n} - \cos(2n)$

Exemple 2 *(Théorème des gendarmes)* Déterminer les limites des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par : **a.** $u_n = 0{,}6^n(5 + \sin(n))$ **b.** $u_n = 42 - \dfrac{5 \times (-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exemple 3 On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \leq v_n \leq w_n}$.
On sait que (u_n) est croissante et converge vers -1, et que (w_n) est décroissante et converge vers 1.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
a. « La suite (v_n) converge vers un nombre ℓ appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$. »
b. « Pour tout entier naturel n, on a $u_0 \leq v_n \leq w_0$. »

La technique consiste à encadrer la partie de la suite qui n'a pas de limite, généralement un cosinus, un sinus ou $(-1)^n$, puis de reconstruire la suite.

Exemple 1

a. *Ici, on devine que la limite de la suite sera $-\infty$, donc on essaye de la majorer.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
$\Leftrightarrow -n - 1 \leq -n + (-1)^n \leq -n + 1$
$\Leftrightarrow -n^2 - n - 1 \leq -n^2 - n + (-1)^n \leq -n^2 - n + 1$
$\Leftrightarrow -n^2 - n - 1 \leq \boldsymbol{u_n \leq -n^2 - n + 1}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 - n + 1 = -\infty$.
D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b. *La limite de la suite sera $+\infty$, donc on essaye de la minorer.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(2n) \leq 1$
$\Leftrightarrow 1 \geq -\cos(2n) \geq -1$ *On a changé le signe, le sens de l'encadrement change.*
$\Leftrightarrow \sqrt{n} + 1 \geq \sqrt{n} - \cos(2n) \geq \sqrt{n} - 1$
$\Leftrightarrow \sqrt{n} + 1 \geq \boldsymbol{u_n \geq \sqrt{n} - 1}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - 1 = -\infty$.
D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 2

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$\Leftrightarrow 4 \leq 5 + \sin(n) \leq 6$

$\Leftrightarrow 0{,}6^n \times 4 \leq 0{,}6^n(5 + \sin(n)) \leq 0{,}6^n \times 6$

Or comme 0,6 est compris entre -1 et 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}6^n \times 4 = \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}6^n \times 6 = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^{\mathrm{n}} \leq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{n}} \geq -\dfrac{5 \times (-1)^{\mathrm{n}}}{\sqrt{n}} \geq -\dfrac{5}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow 42 + \dfrac{5}{\sqrt{n}} \geq 42 - \dfrac{5 \times (-1)^{\mathrm{n}}}{\sqrt{n}} \geq 42 - \dfrac{5}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow 42 + \dfrac{5}{\sqrt{n}} \geq u_n \geq 42 - \dfrac{5}{\sqrt{n}}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 42 + \frac{5}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} 42 - \frac{5}{\sqrt{n}} = 42$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 42$.

Exemple 3

a. Le théorème des gendarmes ne s'applique que quand les deux suites qui bornent la suite (v_n) ont la même limite, ce qui n'est pas le cas ici.

Par exemple, si (u_n) est définie par $u_n = -1 - \frac{1}{n}$ et (w_n) par $w_n = 1 + \frac{1}{n}$ et (v_n) la suite définie par $v_n = (-1)^n$, on a bien les propriétés demandées dans l'énoncé. Pourtant (v_n) ne converge même pas. L'affirmation est fausse.

b. Comme (u_n) est croissante, on a $u_0 \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De même, comme (v_n) est décroissante, on a $v_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \leq v_n \leq w_n$, on a bien $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

L'affirmation est vraie.

5b. Suites monotones

Définitions : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n \leq M}$
- On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n \geq m}$
- On dit que (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée *(c'est-à-dire qu'elle est comprise entre deux réels)*

Propriétés *(théorème de convergence monotone)* :
- Toute suite **croissante et majorée converge**.
- Toute suite **décroissante et minorée converge**.
- Toute suite **croissante non majorée diverge vers** $+\infty$.
- Toute suite **décoissante non minorée diverge vers** $-\infty$.

Remarque : les réciproques sont fausses, par exemple une suite peut diverger vers $+\infty$ sans être croissante.

Exemple 1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 1$
a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq u_n \leq 4$. **b.** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
Exemple 2 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 1}$
a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_{n+1} \leq v_n$ **b.** En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Exemple 1

a. Montrons $P(n)$: « $3 \leq \mathrm{u_n} \leq 4$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Montrons $P(0)$: « $3 \leq \mathrm{u_0} \leq 4$ ».
On a $u_0 = 3$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: « $3 \leq u_n \leq 4$ » est vraie.
Montrons que $P(n+1)$: « $3 \leq u_{n+1} \leq 4$ » est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence :
$3 \leq u_n \leq 4$
$\Leftrightarrow 0{,}75 \times 3 \leq 0{,}75 \times u_n \leq 0{,}75 \times 4$
$\Leftrightarrow 2{,}25 + 1 \leq 0{,}75u_n + 1 \leq 3 + 1$
$\Leftrightarrow 3{,}25 \leq u_{n+1} \leq 4$
Or $3 \leq 3{,}25$, donc on a bien $3 \leq u_{n+1} \leq 4$ et $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq \mathrm{u_n} \leq 4$
b. *On peut essayer de le faire sans récurrence.*
Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0{,}75u_n + 1 - u_n = -0{,}25u_n + 1$
Or d'après **a**, $u_n \leq 4$, donc $-0{,}25u_n \geq -1$, ainsi $-0{,}25u_n + 1 \geq 0$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n$ est positif et (u_n) est croissante.
c. La suite (u_n) est croissante d'après **b** et majorée par 4 d'après **a**.
Donc elle converge vers une limite ℓ.

Exemple 2

a. Montrons $P(n)$: « $1 \leq v_{n+1} \leq v_n$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Montrons $P(0)$: « $1 \leq v_1 \leq v_0$ ».
Or $v_0 = 2$ et $v_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \approx 1{,}7$. Ainsi $1 \leq v_1 \leq v_0$. $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: « $1 \leq v_{n+1} \leq v_n$ » est vraie.
Montrons que $P(n+1)$: « $1 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$ » est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :
$1 \leq v_{n+1} \leq v_n$
$\Leftrightarrow 1 + 1 \leq v_{n+1} + 1 \leq v_n + 1$
$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{v_{n+1} + 1} \leq \sqrt{v_n + 1}$ car la fonction racine carrée est croissante.
$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$
Or $1 \leq \sqrt{2}$, donc $1 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$ et $P(n+1)$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
b. La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par 1.
Donc elle converge vers une limite ℓ.

5c. Point fixe

Théorème (du point fixe) Soit une suite (u_n) définie par une formule de récurrence $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$.
On suppose que u_n **converge vers** $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}$.
Si f est **continue en** $\boldsymbol{\ell}$, alors ℓ est **solution de l'équation** $\boldsymbol{f(x) = x}$.

Remarque : pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe, il faut d'abord avoir démontré que la suite a une limite, généralement avec le théorème de convergence monotone.

Exemple 1 **a.** On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2x(1-x)$. Donner ses variations.
b. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0{,}2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$.
Démontrer qu'elle est croissante et majorée par 0,5. En déduire que la suite (u_n) est convergente,
c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exemple 2 On s'intéresse au taux de chlore dans une piscine. Pour tout entier naturel n, on note (v_n) le taux de chlore en $\mathrm{mg.\,L^{-1}}$ au jour n. On admet que $v_0 = 0{,}7$ et que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3$.
a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

Exemple 1

a. $f(x) = 2x - 2x^2$ et sa dérivée est $f(x) = 2 - 4x$.
Cette dérivée est une fonction affine, positive sur $]-\infty; 0{,}5]$ puis négative sur $[0{,}5; +\infty[$. Donc f est croissante sur $[0; 0{,}5]$ puis décroissante sur $[0{,}5; 1]$.

b. Montrons $P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1} \leq 0{,}5$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Montrons $P(0)$: « $u_0 \leq u_1 \leq 0{,}5$ ».
On a $u_0 = 0{,}2$ et $u_1 = f(u_0) = 2 \times 0{,}2(1-0{,}2) = 2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}32$.
On a bien $u_0 \leq u_1 \leq 0{,}5$ et $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1} \leq 0{,}5$ » est vraie.
Montrons que $P(n+1)$: « $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0{,}5$ » est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence :
$u_n \leq u_{n+1} \leq 0{,}5$
$\Leftrightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0{,}5)$ car f est croissante sur $[0; 0{,}5]$.
$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0{,}5$ car $f(0{,}5) = 2 \times 0{,}5(1-0{,}5) = 2 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5$.
Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 0{,}5$.
La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 0,5.
Elle converge vers une limite ℓ.

c. La suite (u_n) est convergente et définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. D'après le théorème du point fixe :
$f(\ell) = \ell$
$\Leftrightarrow 2\ell(1-\ell) = \ell$
$\Leftrightarrow 2\ell - 2\ell^2 = \ell$

$\Leftrightarrow \ell - 2\ell^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ell(1 - 2\ell) = 0$

Cette équation produit nul a deux solutions : $\ell = 0$ et $1 - 2\ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0{,}5$.

La limite est donc 0 ou 0,5. Or, la limite ne peut pas être0, car (u_n) est croissante et son premier terme est $u_0 = 0{,}2$.

Ainsi, $\ell = 0{,}5$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0{,}5$.

Exemple 2

a. Montrons $P(n)$: « $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Montrons $P(0)$: « $v_0 \leq v_1 \leq 4$ ».

Or $v_0 = 0{,}7$ et $v_1 = 0{,}92 \times 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}944$. Ainsi $v_0 \leq v_1 \leq 4$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$: « $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ » est vraie.

Montrons que $P(n+1)$: « $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$ » est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$v_n \leq v_{n+1} \leq 4$

$\Leftrightarrow 0{,}92 v_n \leq 0{,}92 v_{n+1} \leq 0{,}92 \times 4$

$\Leftrightarrow 0{,}92 v_n + 0{,}3 \leq 0{,}92 v_{n+1} + 0{,}3 \leq 3{,}68 + 0{,}3$

$\Leftrightarrow v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3{,}98$

Or $3{,}98 \leq 4$, donc $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$ et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

b. La suite (v_n) est donc croissante et majorée par 4.

Donc elle converge vers une limite ℓ. Elle est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 0{,}92x + 0{,}3$ est une fonction continue.

D'après le théorème du point fixe :

$f(\ell) = \ell$

$\Leftrightarrow 0{,}92\ell + 0{,}3 = \ell$

$\Leftrightarrow 0{,}92\ell - \ell = -0{,}3$

$\Leftrightarrow -0{,}08\ell = -0{,}3$

$\Leftrightarrow \ell = \dfrac{0{,}3}{0{,}08} = 3{,}75$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3{,}75$