Exercices de révision type Bac sur les suites

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\ 000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 200$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\ 415$.

2. **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 4\ 000$.

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 4\ 000$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 4\ 000 + 6\ 000 \times 0{,}95^n$.

d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier votre réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année. Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ». Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 2

Cet exercice comporte plusieurs questions à choix multiple. Pour chaque question, indiquer la bonne réponse en justifiant.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$. On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b. La suite (w_n) converge vers 1.

c. La suite (u_n) est minorée par 1.

d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{2n+1}$. La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2

b. géométrique de raison e

c. géométrique de raison e^2

d. convergente vers e

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0. On peut affirmer que :

a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge

b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge

c. la suite (u_n) est croissante

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n)^n = -\infty$

4. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par :

$$u_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n}$$

a. (u_n) diverge vers $+\infty$

b. (u_n) converge vers 0

c. (u_n) converge vers $\dfrac{2}{5}$

d. (u_n) converge vers $\dfrac{1}{3}$

Exercice 3

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(1 - x)$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

3. En déduire que la suite est convergente puis déterminer sa limite.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.

En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année 2022 + n. Ainsi $P_0 = 3$.

Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIXe siècle, on considère que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n)$, où b est un réel strictement positif.

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources.

1. Dans cette question, $b = 0$.

a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Déterminer la limite de P_n.

2. Dans cette question, $b = 0{,}2$.

a. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0{,}1 \times P_n$.

Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$

b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Exercice 4

Dans un pays, deux fournisseurs d'électricité ont le monopole du marché : *Electic* et *Energo*.

On s'intéresse à la répartition des parts de marché de ces deux fournisseurs. En 2020, *Electic* a 55% des parts de marché. Chaque année, on prévoit que *Electic* perde 5% de ses clients, mais qu'il récupère 15% des clients de *Energo*. On note a_n la proportion de parts de marché de *Electic* et b_n celui de *Energo*. On a $a_0 = 0{,}55$.

1. Déterminer la valeur de $a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}15b_n$.

3. En déduire que $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}15$.

4. On veut déterminer le pourcentage des parts de marché de *Electic* en 2030.

a. Compléter le programme Python ci-contre pour qu'il réponde au problème.

b. Déterminer le pourcentage à l'aide de la calculatrice au millième près.

```
def parts() :
    a = 0.55
    for ... :
        ...
    return a
```

5. **a.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq 0{,}75$

b. En déduire que la suite (a_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

c. Interpréter les variations et la limite de la suite (a_n) avec le contexte.

Exercice 5

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $a_n \geq 3n - 1$.

d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante. On considère le programme ci-contre écrit en langage Python :

a. Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de `n` pour $p = 0{,}001$.

```
def algo(p) :
  u = 2
  n = 0
  while u-1 > p :
    u = (2*u+1)/(u+2)
    n = n + 1
  return (n,u)
```

Exercice 6

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues vivant sur une île.

Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n(1 - u_n)$ où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9u_n$.

b. Montrer par récurrence que que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0{,}9^n$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Que peut-on en conclure sur le devenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction (´•︵•`)

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-contre affiche l'année à partir de laquelle il restera moins de 30 tortues. Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
u = 0.3
n = 2020
while ... :
    ...
    ...
print(n)
```

Exercice 7

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) sont **strictement positives**.

1. **a.** Calculer u_1 et v_1.

b. Démontrer que (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq n + 1$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n, $r_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. On admet que ${r_n}^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{{u_n}^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2} \leq \frac{1}{{u_n}^2}$$

b. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2}$$

c. Déterminer la limite de la suite $({r_n}^2)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n + 1
    return n
```

(`abs` représente la valeur absolue, `sqrt` représente la racine carrée, et `10**(-4)` représente 10^{-4})
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5. A quoi correspond-elle ?