<u>Chapitre 4 – Limites et continuité</u>

Dans tout le chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I.

1. Limites en l'infini

1a. Limite en $+\infty$

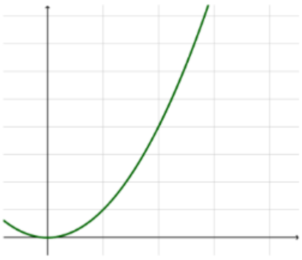
La limite de f en $+\infty$ se définit de la même manière que celle d'une suite.

Définition : **$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$**, si pour tout réel A, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction pour x suffisamment grand. On note :

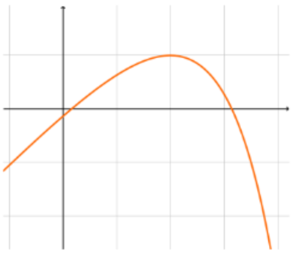
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Cette définition signifie que **quelque soit le nombre réel A qu'on choisisse**, même très grand, à partir d'un certain x, **les $f(x)$ prendront des valeurs au-dessus de A et ne repasseront jamais en-dessous**.
La définition de la **limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$** est analogue.

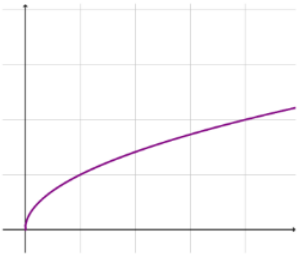
$\lim_{x\to+\infty} x^2 =$



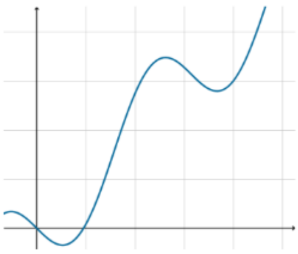
$\lim_{x\to+\infty} x - e^{x-2} =$



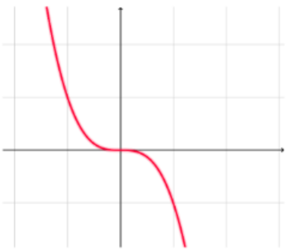
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$



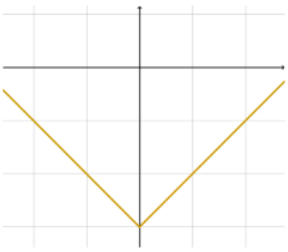
$\lim_{x\to+\infty} x - \sin(2x) =$



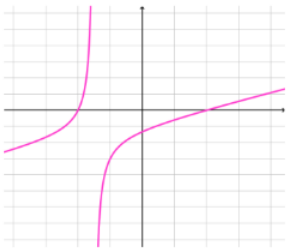
$\lim_{x\to+\infty} -x^3 =$



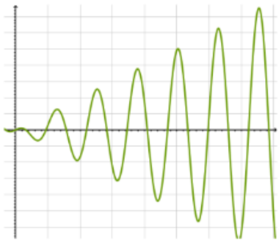
$\lim_{x\to+\infty} |x| - 3 =$



$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4}{2x+3} =$



$\lim_{x\to+\infty} x \times \cos(x) =$



Ici, on ne regarde que ce qui se passe sur la « partie droite » de la courbe.

$+\infty$ $\qquad$ $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ $\qquad$ $+\infty$

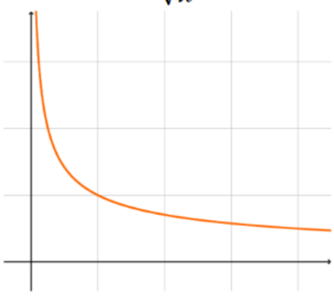
$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ $\qquad$ $+\infty$ $\qquad$ pas de limite

Définition : $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers un réel** $\boldsymbol{\ell}$ **quand** $\boldsymbol{x}$ **tend vers** $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant $\boldsymbol{\ell}$ contient toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction pour x suffisamment grand. On note :

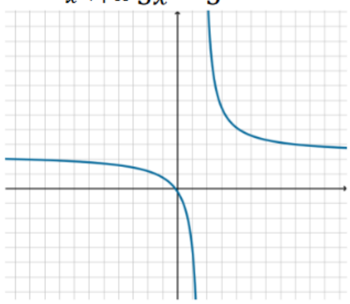
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Cette définition signifie que **quelle que soit l'amplitude ε qu'on choisisse**, même très petite, à partir d'un certain x, les valeurs de la fonction f seront **au plus à une distance ε de la limite ℓ et ne s'en éloigneront plus**.

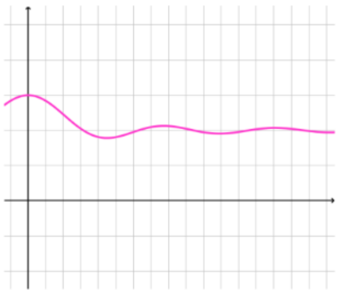
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$



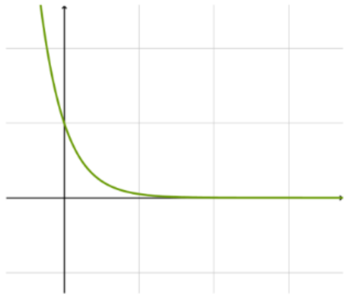
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x+1}{3x-5} =$



$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} + 2 =$



$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} =$



0^+

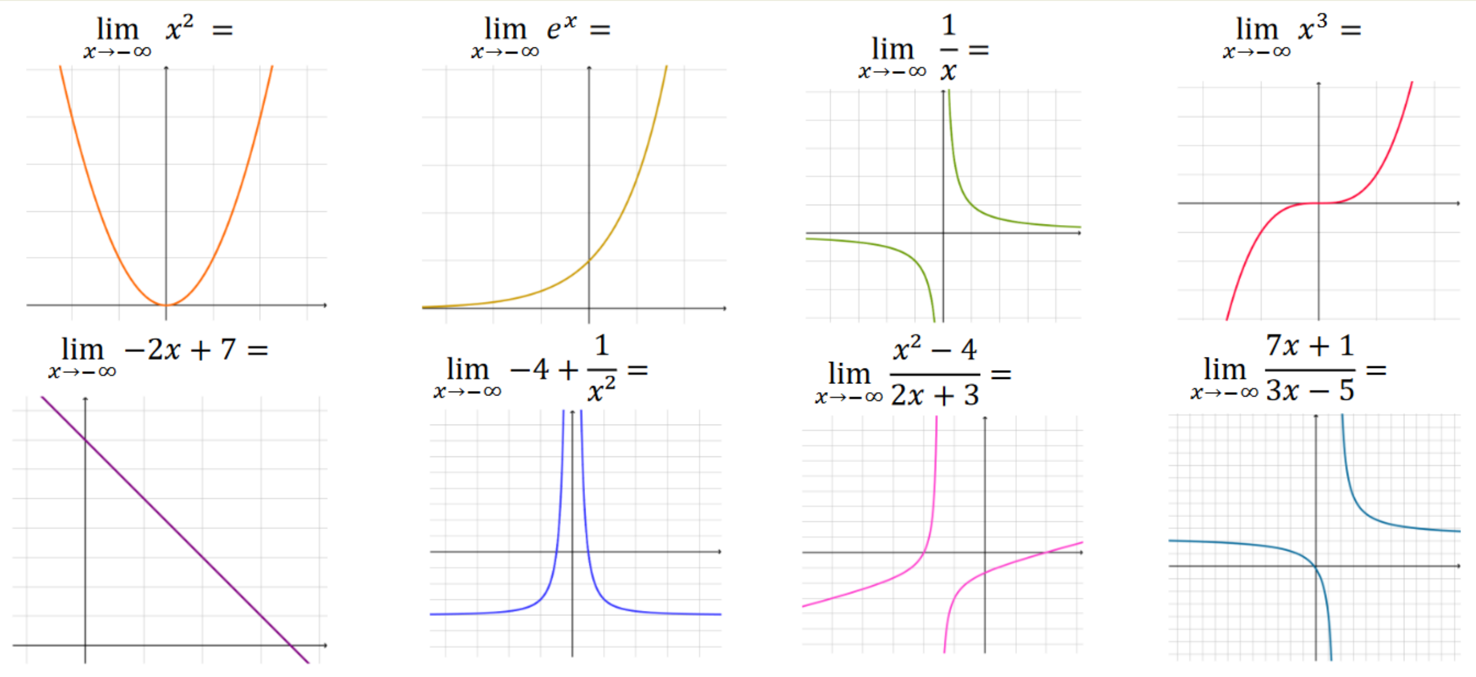
environ 2 ?
(on montrera que c'est en fait $\frac{7}{3}$ *)*

2

0^+

1b. Limite en $-\infty$

La limite de f en $-\infty$ a une définition analogue, mais on s'intéresse cette fois à la « partie gauche » du graphique.



Cette fois, on ne regarde que ce qui se passe sur la « partie gauche » de la courbe, quand l'abscisse tend vers $-\infty$.
Remarquez bien le « $x \to -\infty$ » en-dessous du mot « lim » : cela change de ce qu'on connaît sur les suites, pour lesquelles on ne calcule la limite que quand $n \to +\infty$.

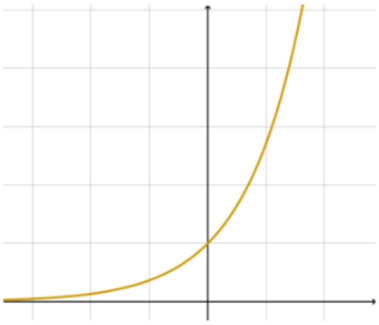
$+\infty$	0^+	0^-	$-\infty$
$+\infty$	-4	$-\infty$	environ 2

1c. Asymptotes horizontales

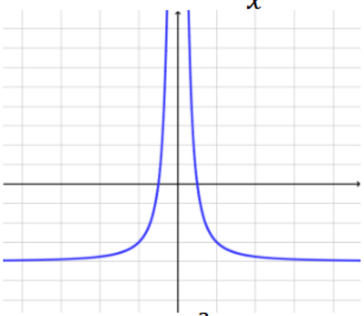
Définition : si f a pour limite finie un nombre ℓ en $+\infty$ ou $-\infty$, alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

Exemple : dans chaque cas, tracer l'asymptote horizontale, si elle existe, et donner son équation.

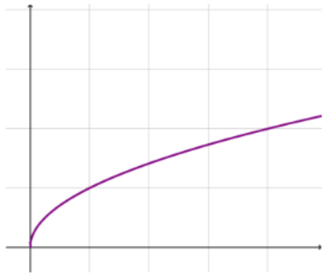
a. $f(x) = e^x$



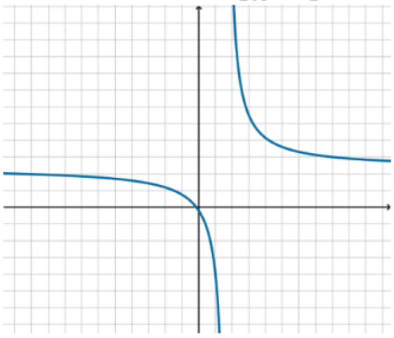
b. $f(x) = -4 + \dfrac{1}{x^2}$



c. $f(x) = \sqrt{x}$

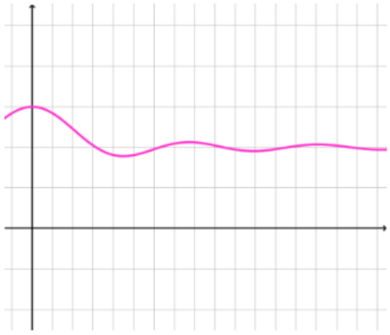


d. $f(x) = \dfrac{7x+1}{3x-5}$



e. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2x+3}$

f. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 2$



Remarque : on peut aussi s'intéresser à la **position relative** de la courbe représentative et de l'asymptote (savoir si la courbe est au-dessus ou en-dessous), en étudiant le **signe de** $\boldsymbol{f(x) - \ell}$.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 0}$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -4$ (et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$ aussi)

donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = -4}$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Cette limite n'est pas finie (et la limite en $-\infty$ n'existe pas), donc la courbe n'admet **pas d'asymptote horizontale**.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{7}{3}$

donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = \frac{7}{3}}$.

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Ces limites ne sont pas finies, donc la courbe n'admet **pas d'asymptote horizontale**.

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 2}$.

2. Limites en un réel

Soit $a \in \mathbb{R}$ une borne de l'intervalle I.

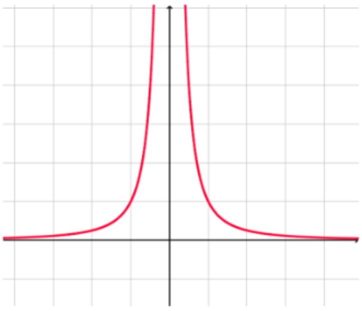
2a. Limite infinie en un réel a

Définition : f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si pour tout réel A, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

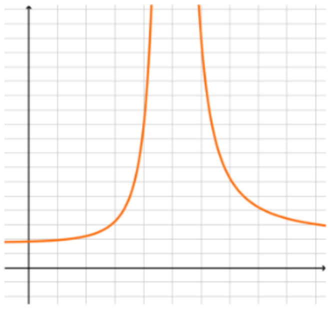
Remarque : la définition de la limite $-\infty$ en un réel a est analogue.

$$\lim_{x \to} \frac{1}{x^2} =$$

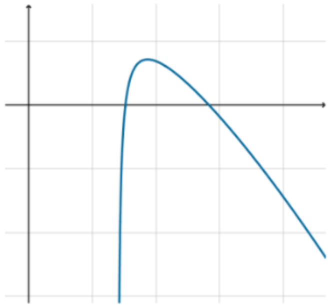


$$\lim_{x \to} \frac{-3}{\sqrt{x+2}} =$$

$$\lim_{x \to} \frac{2x^2 - 17x + 46}{(x-5)^2} =$$



$$\lim_{x \to} \; 3 - \frac{x^2}{\sqrt{5x-7}} =$$



Ici, on précise maintenant vers quel réel a l'abscisse x tend, en-dessous du mot « lim ». On n'a une limite infinie que quand la fonction n'est ***pas définie en a****.*
Par exemple, la dernière fonction est définie sur $\left]\frac{7}{5};+\infty\right[$ *donc on s'intéresse à la limite quand x tend vers* $\frac{7}{5}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{-3}{\sqrt{x+2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 17x + 46}{(x-5)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{7}{5}} 3 - \frac{x^2}{\sqrt{5x-7}} = -\infty$$

2b. Limite à gauche/droite

On peut distinguer :

- la limite à gauche, quand x tend vers a, mais $x < a$

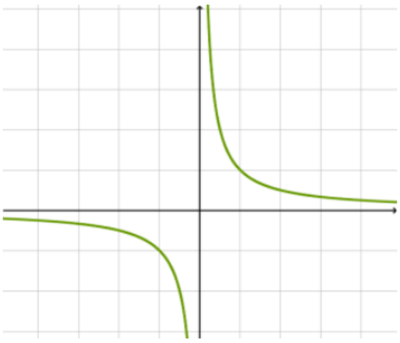
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

- la limite à droite, quand x tend vers a, mais $x > a$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

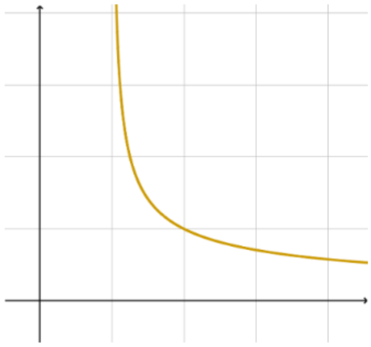
Exemple : dans chaque cas, donner les limites, séparer limite à gauche et limite à droite si elles sont différentes.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$



b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 3}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$



Il existe donc deux écritures équivalentes : « $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ *» qui est assez claire, et «* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ *» qui est plus rapide à écrire mais moins explicite.*

Par exemple, la limite à droite en -3 *d'une fonction* f *s'écrit «* $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ *».*

Les énoncés de bac n'utilisent pas souvent ces deux notations et préfèrent généralement demander la « limite à droite en -3 *».*

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

b. Ici, c'est en $-1{,}5$ que l'on cherche la limite, car $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1{,}5 \\ x < -1{,}5}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1{,}5 \\ x > -1{,}5}} f(x) = -\infty$.

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

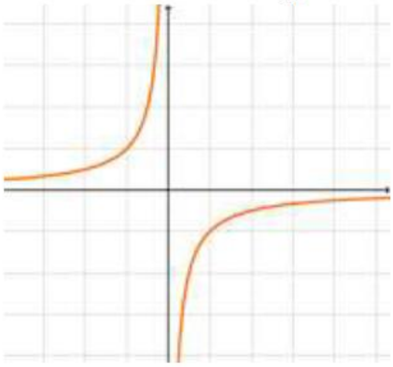
f n'étant définie que sur $]1; +\infty[$, elle n'admet pas de limite à gauche en 1.

2c. Asymptotes verticales

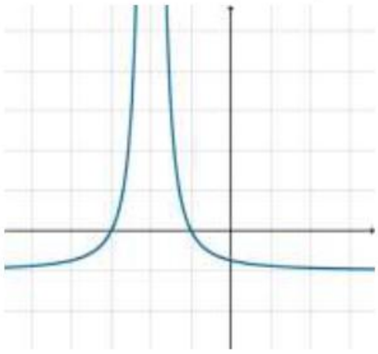
Définition : si f a pour limite infinie $+\infty$ ou $-\infty$ en un nombre a alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Exemple : dans chaque cas, tracer l'asymptote verticale, si elle existe, et donner son équation.

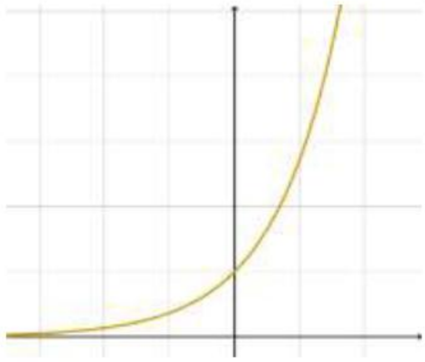
a. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$



b. $f(x) = -1 + \dfrac{1}{(x+2)^2}$



c. $f(x) = e^x$



*Attention : pour que la courbe admette une **asymptote verticale** d'équation $\mathbf{x = a}$, il faut donc que la **limite en un réel a soit** $+\infty$ **ou** $-\infty$**.***
*Pour une **asymptote horizontale** d'équation $\mathbf{y = \ell}$ comme dans la partie précédente, c'est l'inverse : il faut que **la limite en** $+\infty$ **ou** $-\infty$ **soit un réel** $\boldsymbol{\ell}$.*

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$ (et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$)
donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation $\boldsymbol{x = 0}$.

b. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$ *(on ne sépare pas les limites à gauche et à droite, car c'est la même limite)*
donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation $\boldsymbol{x = -2}$.

c. La fonction exp n'admet pas de limite infinie en un réel (on n'a pas de limite du type $\lim\limits_{x \to a} e^x = \pm\infty$) donc sa courbe n'admet **pas d'asymptote verticale**.

2d. Limite finie en un réel

Définition : f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

On peut aussi distinguer les limites à gauche et à droite.

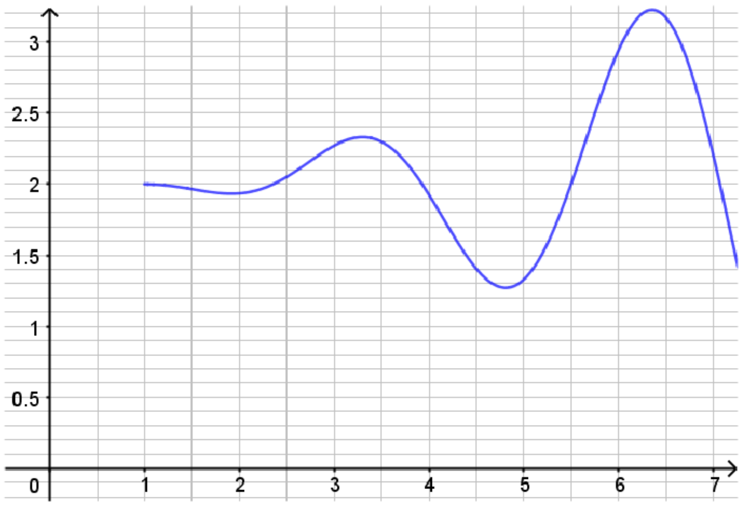
On a représenté une fonction f définie sur $]1; +\infty[$
On s'intéresse à sa **limite à droite en 1**, en considérant des intervalles de la forme $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$

• si $\varepsilon = 1$, l'intervalle $]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ contient toutes les valeurs de f pour $x <$ ...

• si $\varepsilon = 0{,}5$, l'intervalle $]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ contient toutes les valeurs de f pour $x <$ ...

• si $\varepsilon = 0{,}1$, l'intervalle $]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ contient toutes les valeurs de f pour $x <$ ...

Ainsi, on peut conjecturer que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$.

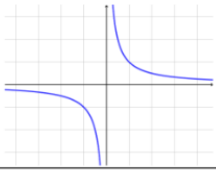
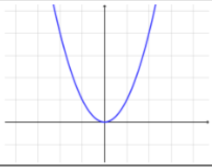
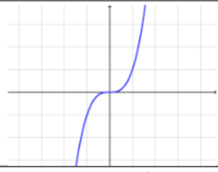
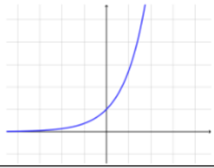
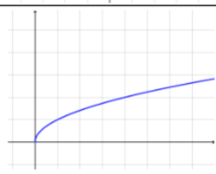


• L'intervalle $]1; 3[$ contient toutes les valeurs de f pour $x < 6$ environ.
• L'intervalle $]1{,}5; 2{,}5[$ contient toutes les valeurs de f pour $x < 4{,}2$ environ.
• L'intervalle $]1{,}9; 2{,}1[$contient toutes les valeurs de f pour $x < 2{,}6$ environ.

3. Déterminer une limite

3a. Limites des fonctions usuelles

Propriétés : Limites des fonctions usuelles

Inverse	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$	
Puissance paire (x^2, x^4 …)	Pour $n \in \mathbb{N}$ pair et non nul : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	
Puissance impaire (x, x^3 …)	Pour $n \in \mathbb{N}$ impair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	
Exponentielle	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	
Racine carrée	$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	

3b. Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, α une borne de l'intervalle I, et ℓ et ℓ' deux réels.

si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x) =$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**indéterminée** (cas « $\infty-\infty$ »)

si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x) =$
ℓ	ℓ'	$\ell\times\ell'$
$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ suivant le signe de ℓ et $\pm\infty$
0	$\pm\infty$	**indéterminée** (cas « $0\times\infty$ »)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$
ℓ	$\ell'\neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$\ell\neq 0$	0^+	$\pm\infty$ suivant le signe de ℓ
$\ell\neq 0$	0^-	$\pm\infty$ suivant le signe de $-\ell$
0	0	**indéterminée** (cas « $\frac{0}{0}$ »)
$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$ suivant le signe de ℓ et $\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**indéterminée** (cas « $\frac{\infty}{\infty}$ »)

- Les cas d'**indétermination** ne signifient pas forcément qu'il n'y a pas de limite, mais plutôt que la limite ne peut pas être trouvée avec ce tableau. Il faut alors **exprimer la fonction sous une autre forme** (par exemple en factorisant).

Les explications écrites entre guillemets servent de rappel mais ne sont pas valides en mathématiques. Ne pas les écrire sur une copie.

- 0^+ représente les fonctions qui tendent **vers 0 en prenant des valeurs positives** (ex : $\frac{1}{x}$ en $+\infty$). Idem pour 0^-.

Exemple 1 *(Opérations sur les limites)* Déterminer les limites.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-e^x$ ***b.*** $\lim\limits_{x\to 0} x+\dfrac{1}{x^2}$ ***c.*** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-3}{x^2+4}$ ***d.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} -3e^x$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} (4-x^2)(5x-2)$ ***f.*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{7+x}{3x}$ ***g.*** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2}{(x-1)^3}$ ***h.*** $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x}-3}{8-4x}$

Exemple 2 *(Formes indéterminées)*

a. On considère la fonction $f : x\mapsto 3x^3-2x^2+5$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Soit $g : x\mapsto \dfrac{x^2-7}{x-1}$. Donner son ensemble de définition, puis les limites aux bornes de celui-ci.

c. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^{2x}-4e^x$.

Exemple 1 *À chaque fois, on se réfère aux limites des suites usuelles, puis au tableau pour connaître la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.*

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$. Par différence, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-e^x=+\infty}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$. Par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} x+\dfrac{1}{x^2}=+\infty}$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$, donc par différence, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-3=-3$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+4=+\infty$. Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-3}{x^2+4}=0^-}$.

Pour le signe du 0^-, on a utilisé la règle « moins divisé par moins donne plus ».

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} -3e^x = -\infty}$.
e. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (4-x^2) = -\infty$.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x-2) = -\infty$.
Ainsi, par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} (4-x^2)(5x-2)} = +\infty$.
f. *Ici, on fait attention : c'est une **limite à gauche**. Ce qui signifie que x tend vers 0 en étant plus petit que 0, c'est-à-dire négatif.*
*C'est pourquoi la **limite de 3x est** $\mathbf{0^-}$, et c'est important de le détailler ici : dans la colonne quotient du tableau, vous pouvez voir que la limite d'un quotient de la forme « $\frac{\ell}{0}$ » est $+\infty$ ou $-\infty$ suivant qu'il s'agisse de 0^+ ou 0^- !*
*Pour ne pas se tromper, **on applique la règle des signes** sur les produits et quotients. Par exemple ici, on se dit « plus divisé par moins donne moins ».*
*Attention à une autre **notation trompeuse** : techniquement, la limite à gauche en 0 de $7+x$ est « 7^- », mais ce « 7^- » représente quand même un nombre positif malgré la présence du $-$!*
Il signifie « la limite est 7, en prenant des valeurs inférieures à 7 ».
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 7+x = 7$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 3x = 0^-$. Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{7+x}{3x}} = -\infty$.
g. On demande une limite à droite. Pour $x > 1$, $(x-1)$ est positif, donc $(x-1)^3$ est également positif. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^+} (x-1)^3 = 0^+$.
De plus, $\lim\limits_{x\to1^+} -2 = -2$. Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to1^+} \frac{-2}{(x-1)^3}} = -\infty$.
C'est la règle des signes avec une expression de la forme « $\frac{0}{\ell}$ » : « plus divisé par moins donne plus ».
h. $\lim\limits_{x\to2^+} \sqrt{x}-3 = \sqrt{2}-3$, qui est un nombre négatif.
Pour $x > 2$, $(8-4x)$ est négatif, donc $\lim\limits_{x\to2^+} 8-4x = 0^-$
Ainsi, par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x}-3}{8-4x}} = +\infty$.
On a encore appliqué la règle des signes avec une expression de la forme « $\frac{\ell}{0}$ » : « moins divisé par moins donne plus ».

Exemple 2
a. *On voit dans cet exemple qu'il peut y avoir une forme indéterminée, mais pas toujours : cela dépend de la borne où on calcule la limite.*
• En $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$.
Par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)} = -\infty$.
• En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$.
Par somme, il s'agit d'une forme indéterminée.

On factorise : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3\left(3 - \frac{2}{\mathrm{x}} + \frac{5}{\mathrm{x}^3}\right)$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{2}{\mathrm{x}} + \frac{5}{\mathrm{x}^3}\right) = 3$.

Par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

b. La fonction g est définie pour tout x réel, sauf 1 qui est une valeur interdite.
Elle est donc définie sur $]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$: il y a donc 4 limites à déterminer.

• En $-\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 7 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 = -\infty$.

Par quotient, il s'agit d'une forme indéterminée.

On factorise : pour tout $x \neq 1$, $g(x) = \frac{\mathrm{x}\left(\mathrm{x} - \frac{7}{\mathrm{x}}\right)}{\mathrm{x}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{x}}\right)} = \frac{\mathrm{x} - \frac{7}{\mathrm{x}}}{1 - \frac{1}{\mathrm{x}}}$

Maintenant, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{x} - \frac{7}{\mathrm{x}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{\mathrm{x}} = 1$.

Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)} = -\infty$.

• En $+\infty$, on réutilise la factorisation : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{x} - \frac{7}{\mathrm{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{\mathrm{x}} = 1$.

Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)} = +\infty$.

• En 1 à gauche, on utilise la forme initiale de la fonction, qui est plus simple :

$$g(x) = \frac{x^2 - 7}{x - 1}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 - 7 = 1^2 - 7 = -6$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x - 1 = 0^-$. Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = +\infty}$.

• En 1 à droite : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 - 7 = -6$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x - 1 = 0^+$. Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = -\infty}$.

c. *On a affaire à une forme indéterminée, mais on se rappelle des opérations sur les puissances :* $e^{2x} = e^{x \times 2} = (e^x)^2$*. On peut donc factoriser.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{2x} - 4e^x = (e^x)^2 - 4e^x = e^x(e^x - 4)$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 4) = +\infty$. Par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$.

3c. Étude de fonctions

Lors d'une étude de fonction, on indiquera maintenant les limites dans le tableau de variations.

Remarque : dans les exercices du bac :

• si on vous demande de dresser le « tableau de variations complet » d'une fonction, cela signifie qu'on attend les variations, les extremums, et les limites.

• si on ne vous demande que de déterminer « le sens de variation » d'une fonction, c'est qu'il suffit de dire sur quels intervalles la fonction est croissante ou décroissante. On n'attend pas de calculs d'extremums ou de limites.

Exemple On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{-x^2+x+2}{x+2}$$

Donner son ensemble de définition, dresser le tableau de variations complet de f, et déterminer les asymptotes éventuelles.

• La fonction f est définie pour tout réel x, sauf -2. Son ensemble de définition est $]-\infty;-\mathbf{2}[\cup]-\mathbf{2};+\infty[$. *Cet ensemble se note aussi $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.*

• Dérivons f. Pour tout $x \neq 2$, on pose : $u(x)=-x^2+x+2$ $\quad v(x)=x+2$

$u'(x)=-2x+1$ $\quad v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{(-2x+1)(x+2)-(-x^2+x+2)\times 1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-4x+x+2+x^2-x-2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-4x}{(x+2)^2}$$

On pourrait étudier le numérateur comme un polynôme, mais il est plus simple de le factoriser.

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{-x(x+4)}{(x+2)^2}}$$

• Le dénominateur est strictement positif pour tout x, donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $-x$ et de $(x+4)$. On dresse le **tableau de variations de f**.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Il nous faut maintenant trouver les quatre limites, ainsi que les deux extremums (en -4 et en 0).

• $f(-4) = \frac{-(-4)^2+(-4)+2}{-4+2} = \frac{-18}{-2} = \mathbf{9}$ et $f(0) = \frac{-0^2+0+2}{0+2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$

• Déterminons la limite en $-\infty$. Par quotient, cela semble être une forme indéterminée, donc on factorise et on simplifie :

$$f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x+2} = \frac{x(-x+1+\frac{2}{x})}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{-x+1+\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+1+\frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x} = 1$. Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

• En $+\infty$, on réutilise la même forme.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x+1+\frac{2}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x} = 1$. Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

• Pour la limite en -2 à gauche, il est plus simple de revenir à la forme initiale :

$$f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x+2}$$

$\lim\limits_{x\to-2} -x^2+x+2 = -4$ (cette limite est la même à gauche ou à droite)

et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2 = 0^-$

Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty}$.

• Idem pour la limite en -2 à droite.

$\lim\limits_{x\to-2} -x^2+x+2 = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2 = 0^+$. Par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty}$.

• *Nous pouvons (enfin) remplir le tableau de variations ! On vérifie que les limites et extremums trouvés sont bien cohérent avec le sens de variation (une fonction ne peut pas tendre vers $-\infty$ en étant croissante).*

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. Théorèmes sur les limites

4a. Comparaison & gendarmes

Thèorème de comparaison : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et α une borne de I.
On suppose de plus que pour tout $x \in I$, $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$.

si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$

Thèorème des gendarmes : Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I, et α une borne de I.
On suppose de plus que pour tout $x \in I$, $\boldsymbol{f(x) \leq g(x) \leq h(x)}$.
S'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \boldsymbol{\ell}$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \boldsymbol{\ell}$.

Exemple 1 Déterminer les limites suivantes. **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(2 + \sin(x))$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3+\cos(x)}{x^2}$

Exemple 2 On considère une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq 5 - 2x$.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. « La fonction f tend vers $-\infty$ en $+\infty$. » **b.** « La fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$. »

Exemple 1 a. *La fonction sinus n'a pas de limite. On l'encadre.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 2 - 1 \leq 2 + \sin(x) \leq 2 + 1$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 + \sin(x) \leq 3$$

On multiplie par e^x qui est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow e^x \leq e^x(2 + \sin(x)) \leq 3e^x$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison,
$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(2 + \sin(x)) = +\infty}$.

b. Pour tout $x < 0$:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 3 - 1 \leq 3 + \cos(x) \leq 3 + 1$$
$$\Leftrightarrow 2 \leq 3 + \cos(x) \leq 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2} \leq \frac{3 + \cos(x)}{x^2} \leq \frac{4}{x^2}$$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes,
$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3+\cos(x)}{x^2} = 0}$.

Exemple 2 a. On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 - 2x = -\infty$. Or $f(x) \leq 5 - 2x$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. **L'affirmation est vraie**.

b. Si on prend, par exemple, $f(x) = -2x + 3\sin(x)$, on a bien $\sin(x) \leq 1$, donc $3\sin(x) \leq 3$ et ainsi $-2x + 3\sin(x) \leq 3 - 2x$. On a bien $f(x) \leq 5 - 2x$.
Pourtant, pour $x \geq 0$, $f'(x) = -2 + 3\cos(x)$ et cette dérivée prend des valeurs positives : $f'(0) = -2 + 3 \times 1 = 1$.
f n'est donc pas décroissante sur $[0; +\infty[$. **L'affirmation est fausse.**

4b. Croissances comparées

Propriété : En cas de forme indéterminée sur un produit/quotient d'une fonction puissance par la fonction exp, les croissances comparées permettent de lever l'indétermination.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Par passage à l'inverse, on trouve aussi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0^+ \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^n} = +\infty \text{ si n pair, } -\infty \text{ sinon}$$

Exemple 1 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^7}$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{e^x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+4)e^{-x}$ **d.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 - 2xe^x$

Exemple 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 2x - 1$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f.

5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.

Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

D'une façon générale, on peut retenir que lors d'un produit/quotient indéterminé à cause d'une fonction puissance et d'une fonction exponentielle, « c'est l'exponentielle qui gagne ».
Mais attention à ne pas utiliser les croissances comparées en-dehors de ce cas-là !

Exemple 1

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7 = +\infty$. Par quotient, c'est une forme indéterminée.

Mais $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^7}} = +\infty$ d'après les croissances comparées.

b. On sépare les deux termes de la somme : $\frac{x^3-2}{e^x} = \frac{x^3}{e^x} - \frac{2}{e^x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par quotient, c'est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = +\infty$ d'après les croissances comparées.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = +\infty$.

En conclusion, par différence, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{e^x} = +\infty}$.

c. Commençons par développer : $(x^2+4)e^{-x} = x^2e^{-x} + 4e^{-x}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Par produit, c'est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$ d'après les croissances comparées.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4e^{-x} = 0$

En conclusion, par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+4)e^{-x} = 0}$.

d. *Attention, ici on cherche la limite en $-\infty$.*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$. Par produit, c'est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{-x} = 0$ d'après les croissances comparées.

En conclusion, par différence, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 - 2xe^{x}} = +\infty$.

Exemple 2

1. • Déterminons la limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$.

Ce n'est pas une forme indéterminée : pas besoin des croissances comparées !

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$. Ainsi, par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

• Déterminons la limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$. Par quotient, c'est une forme indéterminée.

Mais d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$. Ainsi, par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. *Attention à* $\mathrm{xe}^{-\mathrm{x}}$ *: c'est un produit avec* $\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$ *qui est une fonction composée.*

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$.

On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

Ainsi, $f'(x) = 1e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 2 = \boldsymbol{e^{-x}(1-x)+2}$.

3. On pose maintenant $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 1 - x$.

On a alors $u'(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = -1$.

Ainsi, $f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x} \times (-1) = e^{-x}(-1+x-1) = \boldsymbol{e^{-x}(x-2)}$.

4. Le signe de $f''(x)$ ne dépend que de $(x-2)$, qui est négatif sur $]-\infty; 2]$ puis positif sur $[2; +\infty[$. Ainsi **f est concave sur $]-\infty; 2]$ puis convexe sur $[2; +\infty[$.**

5. On déduit du signe de $f''(x)$ que **f' est décroissante sur $]-\infty; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$.**

Son **minimum** est $f'(2) = e^{-2}(1-2) + 2 = \boldsymbol{2 - e^{-2}}$.

6. e^{-2} est inférieur à 1, donc le minimum de f' est strictement positif.

Ainsi, **$f'(x)$ est strictement positif** pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit que **f est croissante sur** $\mathbb{R}$.

4c. Fonctions composées

Propriété (composition) : a, b et c désignent des bornes d'intervalle.

si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} v(X) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} v(u(x)) = c$

Exemple 1 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3-2x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3e^{-x}}$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x)^4$ **d.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}$ **e.** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$

Remarque : Les composées avec les **fonctions affines** seront souvent utiles. Pour tous a, b réels :

Si a est **positif** : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{ax+b} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{ax+b} = 0^+$

Si a est **négatif** : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{ax+b} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{ax+b} = +\infty$

En particulier, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Si a est **positif** : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{ax+b} = +\infty$ et si a est **négatif** : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{ax+b} = +\infty$

Exemple 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}}$

a. Dresser son tableau de variations complet. **b.** Déterminer l'équation de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exemple 3 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^{4x}}{7-3e^{4x}}$

Il s'agit de calculer d'abord la limite de la fonction « à l'intérieur », puis de calculer la limite de la fonction « à l'extérieur » quand x tend vers la limite de la fonction « à l'intérieur ».

Exemple 1

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0^+$.

Donc par composition, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3-2x} = 0^+}$.

Quand on calcule la limite de la fonction « à l'intérieur », on peut noter la variable avec un grand X, pour mettre en avant le fait que ce X correspond à la fonction « à l'intérieur ».

Par exemple, dans l'exemple précédent, le X de $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X$ correspond à $3 - 2x$.

Cette notation n'est pas obligatoire, mais elle peut faciliter la compréhension.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ par quotient, et $\lim\limits_{X \to 0} \sqrt{X} = 0$.

Donc par composition, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3e^{-x}} = 0}$.

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 3x$ est une forme indéterminée par différence.

Mais $x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$. Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 3x = \lim\limits_{x \to -\infty} x(x^2 - 3) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{X \to -\infty} X^4 = +\infty$.

Par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x)^4=+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} 5-\frac{4}{x^2}=5$ et $\lim\limits_{X\to5}\sqrt{X}=\sqrt{5}$. Donc par composition, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5-\frac{4}{x^2}}=\sqrt{5}}$.

e. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1=0^-$ donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$.

De plus, $\lim\limits_{X\to-\infty}\exp(X)=0^+$.

Par composition, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=0^+}$

Exemple 2

a. f est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x)=1+e^{-3x}$. On a alors $v'(x)=-3e^{-3x}$. Ainsi ;

$$f'(x)=-\frac{-3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}=\frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$$

Or la fonction exponentielle et le carré sont toujours positifs.
Ainsi, ***f* est croissante sur** $\mathbb{R}$.
Il nous faut juste trouver ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
• En $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-3x}=+\infty$ par composition. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}1+e^{-3x}=+\infty$,
puis par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0^+}$.
• En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-3x}=0^+$ par composition. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-3x}=1$,
puis par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1}$.
b. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

$$f'(0)=\frac{3e^{-3\times0}}{(1+e^{-3\times0})^2}=\frac{3}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}\quad\text{et}\quad f(0)=\frac{1}{1+e^{-3\times0}}=\frac{1}{2}$$

Ainsi, l'équation de la tangente est $\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$.

Exemple 3

Il s'agit d'une forme indéterminée, mais on factorise par e^{4x}. Pour $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x)=\frac{e^{4x}}{7-3e^{4x}}=\frac{e^{4x}\times1}{e^{4x}\left(\frac{7}{e^{4x}}-3\right)}=\frac{1}{\frac{7}{e^{4x}}-3}$$

Or par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{4x}=+\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{e^{4x}}=0$

et ainsi par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{e^{4x}}-3=-3$.

Donc à nouveau par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\frac{1}{3}}$.

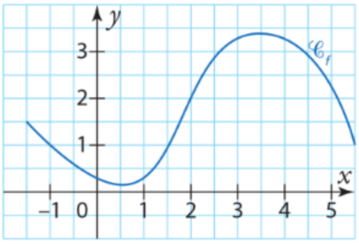
5. Fonctions continues

5a. Définition

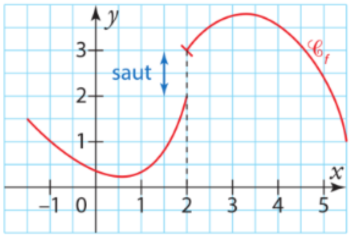
On dit que f est continue en un point $a \in I$ si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par une courbe « en un seul morceau », elle n'a pas de « saut » en certaines valeurs.



Fonction continue sur son intervalle de définition



$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

f est donc discontinue en 2 : elle n'est pas continue sur son intervalle de définition

Un autre exemple de fonction discontinue est la fonction **partie entière** E, qui associe à tout réel x le plus grand entier inférieur ou égal à x. (exemple : $E(3{,}5) = 3$; $E(7) = 7$; $E(4{,}99) = 4$; $E(-2{,}3) = -3$)

Les fonctions discontinues sont généralement définies « par morceaux », comme dans les exemples ci-dessous.

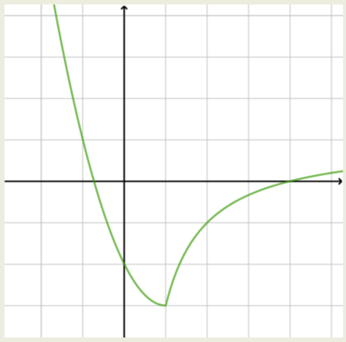
Exemple Déterminer si les fonctions f et g ci-dessous sont continues sur $\mathbb{R}$.

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{x-4}{x} & si\ x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \leq 0 \\ x + 2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Propriété : Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. **La réciproque est fausse.**

Toute opération (somme, produit, quotient) ou composée de fonctions continues est continue.

Il faut vérifier que les limites à gauche et à droite de la fonction au point de discontinuité sont égales.

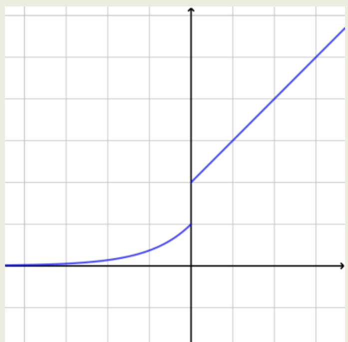


- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 - 2x - 2 = 1^2 - 2 \times 1 - 2 = -3$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-4}{x} = \dfrac{1-4}{1} = -3$

f est continue en 1, et elle est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Elle est donc **continue sur** $\mathbb{R}$.



- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x + 2 = 0 + 2 = 2 \neq 1.$

g n'est pas continue en 0. Elle n'est donc **pas continue sur** $\mathbb{R}$.

5b. Théorème du point fixe

Rappel : Théorème du point fixe
Soit une suite (u_n) définie par une formule de récurrence $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$.
On suppose que u_n **converge vers** $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}$.
Si f est **continue en** $\boldsymbol{\ell}$, alors ℓ est **solution de l'équation** $\boldsymbol{f(x) = x}$.

Exemple Soit la suite (v_n) définie sur sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{{v_n}^2 + 8}$

a. Démontrer qu'elle est décroissante et minorée par 1.
b. Déterminer sa limite.

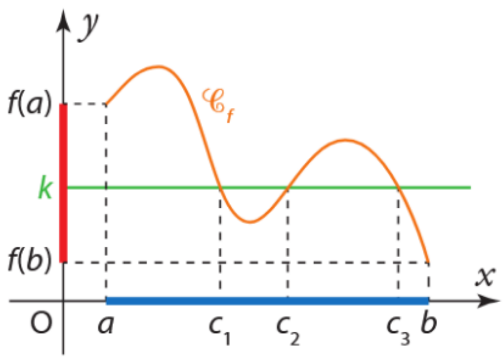
a. Montrons par récurrence la propriété suivante : $v_n \geq v_{n+1} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Initialisation : $v_0 = 6$, et $v_1 = \frac{1}{3}\sqrt{6^2 + 8} = \frac{1}{3}\sqrt{44} \approx 2{,}2$.
Pour $n = 0$, on a bien $v_0 \geq v_1 \geq 1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \geq v_{n+1} \geq 1$.
Montrons alors que $v_{n+1} \geq v_{n+2} \geq 1$.
D'après l'hypothèse de récurrence :
$v_n \geq v_{n+1} \geq 1$
$\Leftrightarrow {v_n}^2 \geq {v_{n+1}}^2 \geq 1^2$, la fonction carré étant croissante sur $[1; +\infty[$
$\Leftrightarrow v_n^2 + 8 \geq v_{n+1}^2 + 8 \geq 1 + 8$
$\Leftrightarrow \sqrt{v_n^2 + 8} \geq \sqrt{v_{n+1}^2 + 8} \geq \sqrt{9}$, la fonction racine carrée étant croissante
$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{v_n^2 + 8} \geq \frac{1}{3}\sqrt{v_{n+1}^2 + 8} \geq \frac{1}{3} \times 3$
$\Leftrightarrow v_{n+1} \geq v_{n+2} \geq 1$
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $\boldsymbol{v_n \geq v_{n+1} \geq 1}$.
La suite (v_n) est décroissante et majorée, elle converge vers une limite ℓ.

b. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8}$ est continue, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = f(v_n)$.
D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de (v_n) est solution de l'équation :
$f(x) = x$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8} = x$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 8} = 3x$
$\Leftrightarrow x^2 + 8 = (3x)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 8 = 9x^2$
$\Leftrightarrow 8x^2 = 8$
$\Leftrightarrow x^2 = 1$
L'équation a pour solutions 1 et -1, mais la suite (v_n) est minorée par 1.
La limite ne peut donc pas être -1. Ainsi, $(\boldsymbol{v_n})$ **converge vers 1**.

5c. Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur un intervalle $[a; b]$, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a; b]$.

Le TVI signifie que $\boldsymbol{f}$ **prend toutes les valeurs comprises entre $\boldsymbol{f(a)}$ et $\boldsymbol{f(b)}$** au moins une fois.
Par exemple dans la courbe ci-contre, le réel k est une « valeur intermédiaire » entre $f(a)$ et $f(b)$.
La fonction f passe trois fois par k, en c_1, en c_2 et en c_3.
Ainsi, l'équation $f(x) = k$ admet trois solutions.
On peut aussi dire que k admet trois antécédents par f.



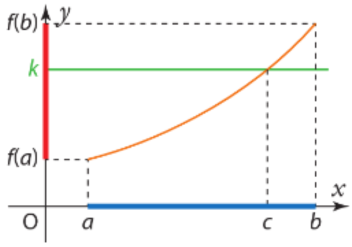
Exemple On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$.
Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1; 3]$.

La fonction f est continue sur $[-1; 3]$.
De plus, $f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 = -2$ et $f(3) = 3^3 - 3^2 = 18$, or $2 \in [-2; 18]$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution.

5d. Corollaire du TVI

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet exactement une unique solution c dans l'intervalle $[a; b]$.

Remarque : on dit alors que f est une bijection : chaque nombre de son « intervalle d'arrivée » a exactement un antécédent. C'est pourquoi ce théorème est parfois appelé « théorème de la bijection ».
Les fonctions, cube, exponentielle, inverse... sont des bijections. La fonction carré n'est pas une bijection sur $\mathbb{R}$.



Votre rédaction du corollaire du TVI doit contenir 4 points :
- la **continuité** de la fonction
- la **stricte monotonie** (croissante/décroissante) de la fonction. C'est ce qui garantit l'unicité de la solution. *Vérifiez bien que la fonction ne change pas de sens de variation sur l'intervalle considéré !*
- le fait que le réel **k soit compris entre $f(a)$ (ou sa limite en a) et $f(b)$ (ou sa limite en b)**. *On peut l'exprimer avec des inégalités, mais on le fait plus souvent avec un intervalle « image ».*
- et bien sûr, le **nom du théorème** employé « corollaire du TVI ».

Exemple 1 Soit g définie sur $I = [-2; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Dresser son tableau de variation complet et montrer que l'équation $g(x) = 10$ admet une unique solution α dans I. Donner un arrondi au dixième de α.

Exemple 2 Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$

a. Dresser le tableau de variations de la fonction. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$), et que $\alpha \in [0; 1]$.

c. Par balayage avec une calculatrice, donner un encadrement de α à 10^{-2}.

Exemple 3 Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{10x}{e^x+1}$

1. Démontrer que pour tout réel de I, $f'(x) = \frac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.

2. Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$. En donner un arrondi à 10^{-2}.

3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les variations de f sur I.

Pour appliquer le corollaire du TVI, il faut donc montrer que la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle considéré.
Ne vous préoccupez pas trop du « strictement » : on ne connaît pas, en Terminale, de fonction qui soit croissante sans l'être strictement.

Exemple 1

La fonction g, définie sur $[-2; +\infty[$ admet pour dérivée :

$$\boldsymbol{g'(x)} = 3x^2 - 6x = \boldsymbol{x(3x-6)}$$

On dresse le tableau de signes de la dérivée, puis le tableau de variations de g.

x	-2		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On calcule les extremums et la limite :

- $g(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 3 = -8 - 12 + 3 = -17$

• $g(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 + 3 = -3$
• $g(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 = 8 - 12 + 3 = -1$
• Enfin, la limite en $+\infty$ est indéterminée par somme, mais

$$g(x) = x^2\left(x - 3 + \frac{3}{x^2}\right)$$

et par produit, on trouve $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. On peut compléter le tableau.

x	-2		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-6$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	-17	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On veut maintenant résoudre l'équation $g(x) = 10$. Maintenant que le tableau est rempli, on voit que le seul antécédent possible de 10 par la fonction g est dans l'intervalle $[2; +\infty[$. On applique donc le corollaire du TVI sur cet intervalle.
• La fonction g est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$,
• $g(2) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, et $10 \in [-1; +\infty[$ *(c'est l'intervalle « image »)*
• donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 10$ admet **une unique solution $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{2}; +\infty[$**.
On utilise la calculatrice pour trouver cet antécédent de 10 : $\boldsymbol{\alpha \approx 3,5}$.
Attention à bien faire l'arrondi demandé par l'énoncé.

Exemple 2

a. *On dérive en faisant attention au produit $x\sqrt{x}$.*

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(1\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 2$$

Pour réduire la parenthèse, on remarque que pour tout x positif, $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) - 2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \sqrt{x} - 2}$$

Étudions le signe de $f'(x)$: $\sqrt{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4$

$$f(4) = \frac{2}{3} \times 4\sqrt{4} - 2 \times 4 + 1 = \frac{16}{3} - 8 + 1 = -\frac{5}{3}$$

et la limite en $+\infty$ est admise.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. *On voit sur le tableau que la fonction f passe deux fois par 0 :*
une fois sur $[0; 4]$ (cela correspond au α de l'énoncé), et une autre fois sur $[4; +\infty[$ (ce qui correspond au β).
L'énoncé est un peu plus précis et nous dit même que α appartient à $[0; 1]$. Nous allons donc appliquer le corollaire du TVI sur cet intervalle.
• La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$
• $f(0) = 1$, et $f(1) = \frac{2}{3} \times 1\sqrt{1} - 2 \times 1 + 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$ et $0 \in [-\frac{1}{3}; 1]$
Attention à bien écrire l'intervalle image correctement, avec les bornes de l'intervalle dans l'ordre croissante, même si f est décroissante.
• donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet **une unique solution $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}; \mathbf{1}]$.**
Il faut maintenant réappliquer le corollaire du TVI pour montrer qu'il y a une autre solution, cette fois sur l'intervalle $[4; +\infty[$.
Au Bac, généralement, l'existence de cette deuxième solution est admise (on ne vous fait pas écrire le même raisonnement deux fois).
• La fonction f est continue et strictement croissante sur $[4; +\infty[$.
• $f(4) = -\frac{5}{3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in [-\frac{5}{3}; +\infty[$
• donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet **une unique solution $\boldsymbol{\beta} \in [\mathbf{4}; +\infty[$.**
c. On utilise la calculatrice pour trouver un encadrement au centième :
$\mathbf{0,69 < \boldsymbol{\alpha} < 0,70}$.

Exemple 3
1. On dérive f comme un quotient :

$$f'(x) = \frac{10(e^x + 1) - 10x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{10(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2}$$

et si on pose $g(x) = e^x + 1 - xe^x$, on a bien $\boldsymbol{f'(x) = \frac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)}$
2. Pour appliquer le corollaire du TVI, il faut connaître le sens de variation de g.
Or $g'(x) = e^x - (1e^x + xe^x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$.
Sur $[0; +\infty[$, x est positif, donc $g'(x) = -xe^x$ est négatif sur tout $[0; +\infty[$.
On dresse le tableau de variations.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
g	$\searrow$	

On calcule $g(0) = e^0 + 1 - 0e^0 = 2$ La limite de g en $-\infty$ est indéterminée, mais

$$g(x) = e^x\left(1 + \frac{1}{e^x} - x\right)$$

et ainsi, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
On peut donc compléter le tableau.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
g	2 $\searrow$	$-\infty$

On voit que g passe une seule fois par 0, on applique le corollaire du TVI.

• La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$,

• $g(0) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, et $0 \in]-\infty; 2]$

• donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet **une unique solution $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}; +\infty[$.**

On utilise la calculatrice : $\boldsymbol{\alpha \approx 1,28}$.

3. On vient de démontrer que g ne passe qu'une seule fois par 0, en α.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
g	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Elle est décroissante, cela prouve que **$\boldsymbol{g(x)}$ est d'abord positif sur $[\mathbf{0}; \boldsymbol{\alpha}]$ puis négatif sur $[\boldsymbol{\alpha}; +\infty[$.**

On peut même compléter le tableau de variation de g et dresser son tableau de signes comme ci-contre. Ce type de raisonnement, consistant à utiliser le sens de variation et le TVI pour obtenir le signe d'une fonction, est assez fréquent au bac.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Or on a montré que $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$.

Un carré étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $g(x)$.

Ainsi, **$\boldsymbol{f}$ est croissante sur $[\mathbf{0}; \boldsymbol{\alpha}]$ puis décroissante sur $[\boldsymbol{\alpha}; +\infty[$.**