Devoir surveillé sur les limites et la continuité

Exercice 1 (5 pts) Déterminer toutes les limites en justifiant soigneusement.
Une réponse non justifiée ne rapportera pas de points.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-\dfrac{1}{x}$ ***b.*** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5+7x^2$ ***c.*** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}+3$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cos(x)}{x^2}$ ***e.*** $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{x^3-5}{x-2}$ ***f.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+1}$

Exercice 2 (5 pts) On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3e^x}{1-e^x}$$

a. Déterminer sa limite à droite en 0.
En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote dont on précisera l'équation.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c. Démontrer que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
d. Montrer que l'équation $f(x)=-5$ admet une unique solution.

Exercice 3 (10 pts) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=xe^{-x}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer la limite en $-\infty$ de f.
b. Démontrer que la courbe C_f possède une asymptote en $+\infty$, et en donner une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x :

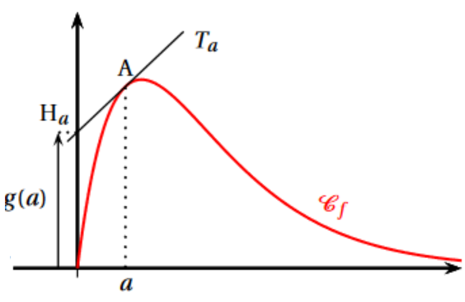
$$f'(x)=(1-x)e^{-x}$$

3. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
On fera figurer les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. **a.** Démontrer que sur l'intervalle $[1;+\infty[$, l'équation $f(x)=0{,}2$ admet une seule solution, notée α.
b. Donner une valeur approchée au millième de α.

5. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

6. *Cette question est difficile et rapporte relativement peu de points.*
Soit a un réel appartenant à $[0;+\infty[$ et A le point de la courbe C_f d'abscisse a.
On note T_a la tangente à C_f en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y=\left((1-a)e^{-a}\right)x+a^2e^{-a}$$

b. En déduire l'expression de $g(a)$.
c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe C_f.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.