<u>Chapitre 12 – Fonctions trigonométriques</u>

Soit $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.

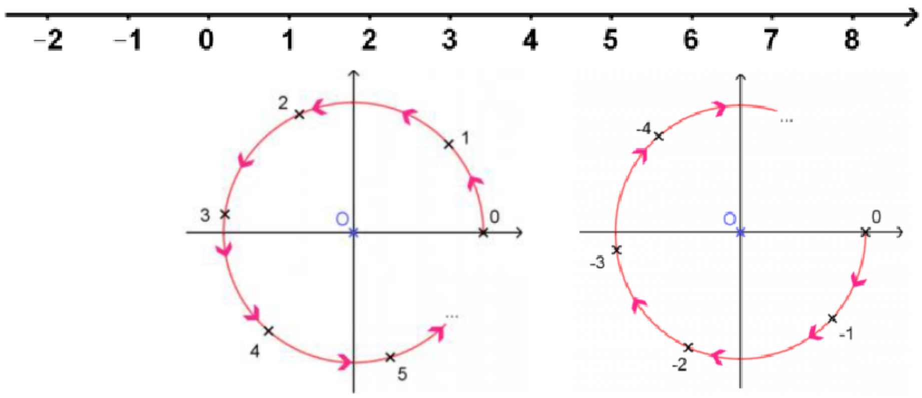
1. Rappels

1a. Cercle trigonométrique

Définition : Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

Pour créer le cercle trigonométrique, on part de la droite réelle :

On « enroule » cette droite autour du cercle de centre O et de rayon 1 :



Cela implique deux propriétés :

- le périmètre du cercle étant égal à 2π, il est plus facile de repérer les coordonnées trigonométriques **en fonction de π**. Par exemple, le point à gauche $(-1;0)$ correspond à π, le point en haut $(0;1)$ correspond à $\frac{\pi}{2}$ ...
- un même point correspond à **plusieurs coordonnées trigonométriques**.

Par exemple, le point en bas $(0;-1)$ correspond à $-\frac{\pi}{2}$, mais aussi à $\frac{3\pi}{2}$

1b. Mesures d'angle en radians

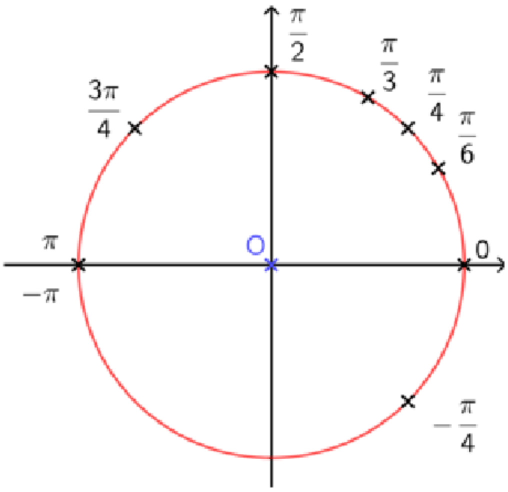
Définition : Chaque mesure d'angle orienté correspond à un point du cercle trigonométrique. Les mesures sont données modulo 2π.
La mesure principale d'un angle est celle de l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Ci-contre, quelques points du cercle trigonométrique avec la **mesure principale** d'angle correspondante.

Pour trouver la mesure principale d'un angle, il suffit de **lui ajouter ou de lui enlever 2π** jusqu'à trouver un nombre de **l'intervalle** $]-\pi;\pi]$.

L'unité de mesure d'angles en fonction de 2π est le **radian**.

Pour convertir les **radians en degrés**, il suffit de les **multiplier par** $\dfrac{180}{\pi}$.



Exemple Trouver les mesures principales des angles suivants :

a. $-\dfrac{3\pi}{4}$ **b.** $\dfrac{7\pi}{3}$ **c.** $\dfrac{7\pi}{6}$ **d.** $\dfrac{3\pi}{2}$ **e.** -13π **f.** $\dfrac{99\pi}{4}$

a. $-\frac{3\pi}{4}$ est déjà dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, c'est une mesure principale.

b. $\frac{7\pi}{3}$ est supérieur à π. On lui enlève 2π.

$\frac{7\pi}{3}-2\pi=\frac{7\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ donc la mesure principale de $\frac{7\pi}{3}$ est $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$.

c. $\frac{7\pi}{6}-2\pi=\frac{7\pi}{6}-\frac{12\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$ donc la mesure principale de $\frac{7\pi}{6}$ est $\boldsymbol{-\frac{5\pi}{6}}$.

d. $\frac{3\pi}{2}-2\pi=\frac{3\pi}{2}-\frac{4\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$ donc la mesure principale de $\frac{3\pi}{2}$ est $\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}}$.

e. $-13\pi+7\times 2\pi=\pi$ donc la mesure principale de -13π est $\boldsymbol{\pi}$.

f. *Plus difficile. Dans $\frac{99\pi}{4}$, combien y a-t-il de 2π ? Cela correspond à une division euclidienne. $2\pi=\frac{8\pi}{4}$, et dans 99, il y a 12 fois 8.*

$\frac{99\pi}{4}-12\times 2\pi=\frac{99\pi}{4}-12\times\frac{8\pi}{4}=\frac{99\pi}{4}-\frac{96\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

donc la mesure principale de $\frac{99\pi}{4}$ est $\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$.

1c. Cosinus et sinus

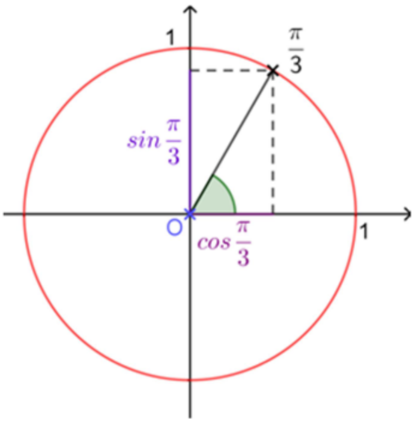
Définition : Soit θ une mesure d'angle. Soit $M(\theta)$ le point correspondant du cercle trigonométrique.

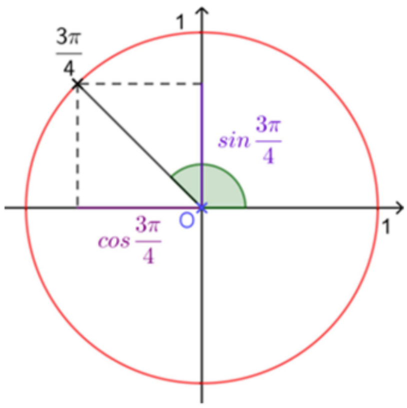
$\cos(\theta)$ est l'abscisse de M, $\sin(\theta)$ est son ordonnée.

Le cosinus et le sinus correspondent donc à l'**abscisse** et l'**ordonnée** du point défini par l'angle en radians.
Ce sont des nombres compris **entre -1 et 1**.

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx$





On connaît plusieurs valeurs particulières de *cos* et *sin* :

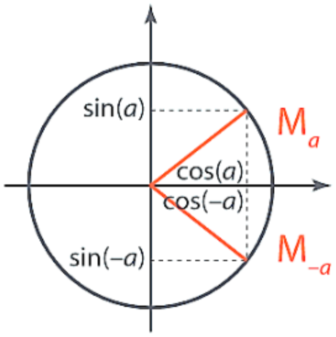
$\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$						
$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}$						

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathbf{0,5}\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \mathbf{0,87}\ ;\ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx \mathbf{-0,70}\ ;\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx \mathbf{0,70}$$

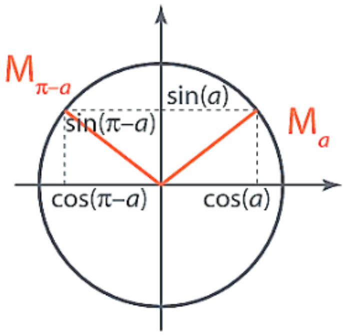
$\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

1d. Relations trigonométriques

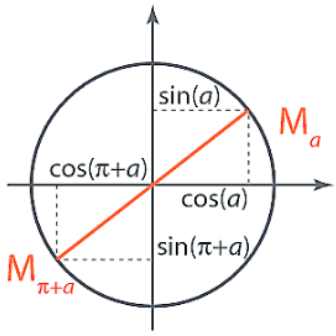
Par symétrie, on trouve différentes formules.



$\cos(-a) = \cos(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$



$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$



$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$

Elles permettent de trouver le cosinus et le sinus d'autres angles (ce qu'on peut faire à l'aide d'un schéma de cercle trigonométrique). Déterminer les nombres suivants.

a. $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ **b.** $cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **c.** $cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ **d.** $sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **e.** $sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

Suivant qu'on calcule un sinus ou un cosinus, une symétrie peut changer le signe ou non.

a. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées)

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses)

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d'après **a**)

c. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses)

$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées)

$= -\frac{1}{2}$

d. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses)

$= -\frac{1}{2}$

e. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées)

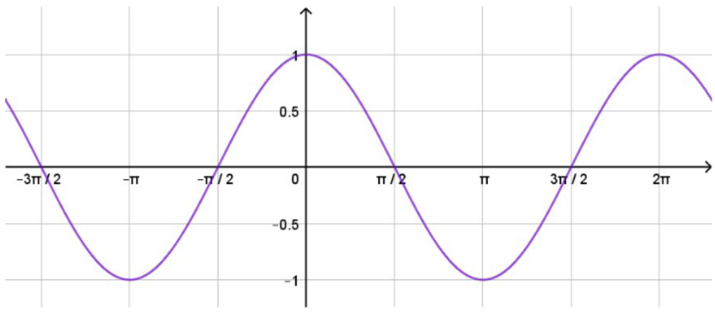
$= -\frac{1}{2}$ (d'après **d**)

2. Fonctions cos et sin

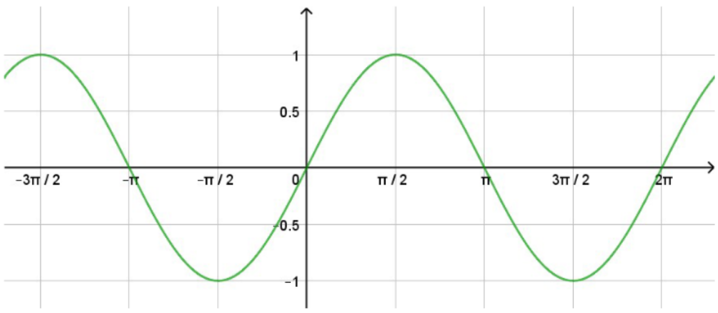
2a. Définition et parité

Définition : Le cosinus et le sinus définissent deux fonctions sur $\mathbb{R}$.

Fonction $x \longmapsto \mathbf{cos}(x)$



Fonction $x \longmapsto \mathbf{sin}(x)$



Remarque : La courbe de sin est la courbe de cos, décalée de $\frac{\pi}{2}$ unités vers la droite.

Entre autres résultats, on peut montrer que pour tout angle θ, $\cos(\theta) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$

Propriété : • cos et sin sont $2\pi -$ périodiques :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
• cos est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$
• sin est impaire : $\sin(-x) = -sin(x)$

2b. Dérivées

Propriété : cos et sin sont dérivables et pour tout x réel :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

Comme cos et sin sont 2π-périodiques, on peut ne faire les tableaux de signes et variations que sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[0; 2\pi]$ ou $[-\pi; \pi]$, et en déduire le reste des signes/variations par répétition.

(Comme elles sont paire/impaire, on pourrait même se limiter à l'intervalle $[0; \pi]$ et déduire le reste par symétrie)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		π		2π
sin	0	$+$	0	$-$	0

x	0		π		2π
cos	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

2c. Composition

Propriété : Soit u fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Alors $(\cos u)' = -u' \times \sin(u)$ et $(\sin u)' = u' \times \cos(u)$

Exemple 1 Dans chaque cas, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$\boldsymbol{a}.\, f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} \quad I =]0; +\infty[$ $\qquad$ $\boldsymbol{b}.\, g(x) = \cos(2x+1)\sin(5x+3) \quad I = \mathbb{R}$

Exemple 2 Étudier la convexité de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par $f(x) = x + \sin(x)$.

Exemple 3 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos(x)\,dx \qquad J = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sin(3x+\pi)\,dx \qquad K = \int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$$

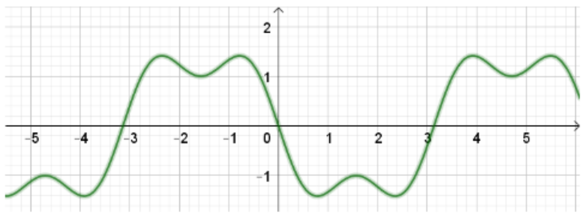
Exemple 4 On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\,dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\,dx$$

En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir que $I = 1 + J$ et que $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$.
En déduire la valeur de I.

Exemple 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin^3(x) - 3\sin(x)$

a. Montrer que f est une fonction périodique.
b. Étudier la parité de f.
c. On admet la formule : $2\sin^2(a) = 1 - \cos(2a)$.
Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -3\cos(x)\cos(2x)$
d. Montrer que pour étudier la fonction f, on peut se limiter à l'intervalle $[0;\pi]$. Dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.



Exemple 1

a. $f'(x) = \dfrac{\cos(x) \times x^2 - \sin(x) \times 2x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{x(x\cos(x) - 2\sin(x))}{x^4}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3}}$

b. On dérive g comme un produit.
Soit $u(x) = \cos(2x+1)$ et $v(x) = \sin(5x+3)$
Alors $u'(x) = -2\sin(2x+1)$ et $v'(x) = 5\cos(5x+3)$.
Donc $g'(x) = \boldsymbol{-2\sin(2x+1)\sin(5x+3) + 5\cos(5x+3)\cos(2x+1)}$.

Exemple 2

Pour $x \in [0;\pi]$, $f'(x) = 1 + \cos(x)$ et $f''(x) = -\sin(x)$.
Or la fonction sinus est positive sur $[0;\pi]$, donc f'' est négative sur cet intervalle.
La fonction f est **concave** sur $[0;\pi]$.

Exemple 3

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin(0) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Pour J, on doit tenir compte de deux choses : une primitive de la fonction sin est la fonction $-\cos$, et il s'agit ici d'une fonction composée, comme on en a intégré plusieurs dans le chapitre sur les intégrales : par exemple, une primitive de la fonction $f(x) = e^{3x+1}$ est $F(x) = \frac{e^{3x+1}}{3}$.

$$J = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sin(3x+\pi)\,dx = \left[-\frac{\cos(3x+\pi)}{3}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}$$

$$= -\frac{\cos(\pi)}{3} - \left(-\frac{\cos\left(3\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi\right)}{3}\right)$$

$$= -\frac{(-1)}{3} + \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3}$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $\boldsymbol{J = \frac{1}{3}}$

Pour K, nous allons devoir faire une intégration par parties…

La fonction la plus simple à intégrer semble être sin*.*

On pose $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$.

On a alors $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = 1$.

On réalise une IPP.

$$K = [-\cos(x)\times x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)\times 1\,dx$$

$$K = -\pi\cos(\pi) + \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx$$

$$K = -\pi\cos(\pi) + [\sin(x)]_0^{\pi}$$

$$K = -\pi\cos(\pi) + \sin(\pi) - \sin(0)$$

Or $\sin(\pi)$ et $\sin(0)$ sont nuls, et $\cos(\pi) = -1$. $\boldsymbol{K = \pi}$.

Exemple 4 *Intégrer par parties de deux manières différentes signifie qu'on ne va pas choisir les mêmes fonctions u' et v pour chaque IPP.*

• On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \sin(x)$. On a alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos(x)$.

$$I = [e^x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)$$

La deuxième intégrale n'est autre que J. On achève le calcul.

$$I = e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0 \sin(0) - J = \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{2}} - J}$$

• On pose $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. On a alors $u(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

$$I = [-\cos(x)\, e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\, e^x$$

On applique la linéarité et on retrouve J ! C'est incroyable, elle est partout.

$$I = [-\cos(x)\, e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, e^x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} + \cos(0)\, e^0 + J = \mathbf{1 + J}$$

• On déduit de $I = 1 + J$ que $J = I - 1$. Ainsi :

$$I = e^{\frac{\pi}{2}} - J = e^{\frac{\pi}{2}} - I + 1 \Leftrightarrow 2I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \Leftrightarrow I = \boldsymbol{\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}}$$

Exemple 5 a. D'après le graphique, f semble effectivement 2π −périodique.
Vérifions cela. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x + 2\pi) = 2\sin^3(x + 2\pi) - 3\sin(x + 2\pi)$
Or la fonction sinus est elle-même 2π −périodique de période 2π,
donc $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Ainsi : $\boldsymbol{f(x + 2\pi)} = 2\sin^3(x) - 3\sin(x) = \boldsymbol{f(x)}$.
f est bien 2π −périodique.
b. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = 2\sin^3(-x) - 3\sin(-x)$
Or la fonction sinus est impaire : $\sin(-x) = -\sin(x)$.
De même, $\sin^3(-x) = (\sin(-x))^3 = (-\sin(x))^3 = -\sin^3(x)$. Ainsi :
$\boldsymbol{f(-x)} = 2 \times (-\sin^3(x)) - 3 \times (-\sin(-x)) = -2\sin^3(-x) + 3\sin(-x) = \boldsymbol{-f(x)}$
f est donc impaire.
c. On applique la formule $(u^3)' = 3u'u^2$. Pour $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = 2 \times 3\cos(x)\sin^2(x) - 3\cos(x)$
Or on peut factoriser cette expression par $3\cos(x)$.
$f'(x) = 3\cos(x)\,(2\sin^2(x) - 1)$
On applique alors la formule admise.
$f'(x) = 3\cos(x)\,(1 - \cos(2x) - 1) = \boldsymbol{-3\cos(x)\cos(2x)}$
d. On a montré que la fonction f était 2π −périodique, donc on peut ne l'étudier que sur un intervalle d'amplitude 2π, comme par exemple $[-\pi;\pi]$.
De plus, f est impaire, donc on peut se limiter à la partie positive de cet intervalle et déduire le reste par symétrie. Donc on se limite à $[0;\pi]$.
On utilise le tableau de signes de la fonction cosinus pour en déduire le signe de f'. Pour le facteur $\cos(2x)$, on remarque que si $x \in [0;\pi]$, alors $2x \in [0;2\pi]$. C'est donc le tableau de signes de la fonction cosinus sur $[0;2\pi]$ qu'il faut reporter.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
-3		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\cos(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$\cos(2x)$		$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. Équations et inéquations

3a. Équations

Propriété : Pour tous réels x et a :

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } = -a + 2k\pi \text{ , avec } k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = (\pi - a) + 2k\pi \text{ , avec } k \in \mathbb{Z}$$

En pratique, on s'appuie sur le cercle trigonométrique pour résoudre une équation avec cos et sin.

Exemple 1 Résoudre l'équation :

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 2 Résoudre l'équation :

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 3 Résoudre l'équation :

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Exemple 4 Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, combien de solutions sont admises par l'équation $\sin(x) = 0{,}1$?

Exemple 1

$$cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Exemple 2

$$sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$$

Exemple 3

$cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\Leftrightarrow cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi)$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{2} = -\pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ou $2x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$

Exemple 4

D'après la propriété, il existe deux angles x tels que $\sin(x) = 0{,}1$. L'équation admet donc deux solutions.

3b. Inéquations

Propriété : Soit $\in \mathbb{R}$.

• Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq \cos(a)$ sont les réels x vérifiant:

$$a + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - a + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

• Les solutions de l'inéquation $\sin(x) \leq \sin(a)$ sont les réels x vérifiant :

$$-\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 1 Résoudre sur l'intervalle $[0; 2\pi[$ l'inéquation :

$$2\cos(x) \leq 1$$

Exemple 2 Résoudre sur l'intervalle $[-\pi; \pi[$ l'inéquation :

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 1

$2\ \cos(x) \leq 1$

$\Leftrightarrow \cos(x) \leq \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(x) \leq \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \cos(x) \leq 2\pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \cos(x) \leq \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$

Exemple 2

$sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leq \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow -\pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ \leq x - \dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \ \leq x - \dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi \ \leq x \leq \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$