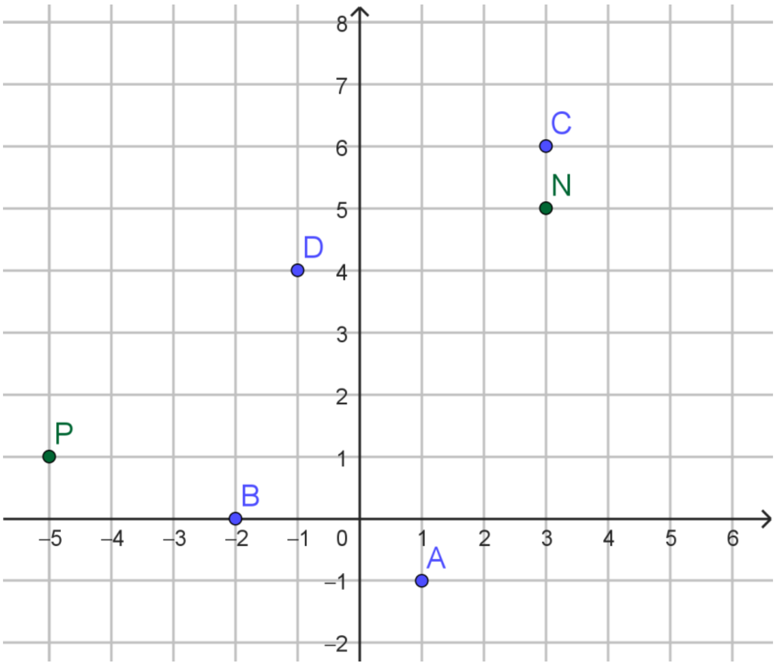
Devoir commun de 2^de^

Partie 1 : Vecteurs (16 pts)

1. (2 pts, - 1 pt par erreur)
Dans le repère ci-contre, placer les points $A(1;-1)$, $B(-2;0)$, $C(3;6)$ et $D(-1;4)$.



2a. (3 pts) Calculer la distance AC, donner la valeur exacte puis un arrondi au dixième.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (6-(-1))^2}$$
$$AC = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53} \approx 7{,}3$$

2b. (2 pts) Déterminer par le calcul, les coordonnées de M, milieu du segment $[BC]$. *(On ne demande pas de le placer dans le repère)*

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2};\frac{y_B + y_C}{2}\right) \quad M\left(\frac{-2+3}{2};\frac{0+6}{2}\right) \quad M\left(\frac{1}{2};3\right)$$

3a. (2 pts) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1-1\\4-(-1)\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$$

3b. (2 pts) Placer le point N tel que $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.
On acceptera toute réponse cohérente avec la réponse donnée en question 1.

On considère maintenant les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-5\end{pmatrix}$. *(On ne demande pas de les représenter)*

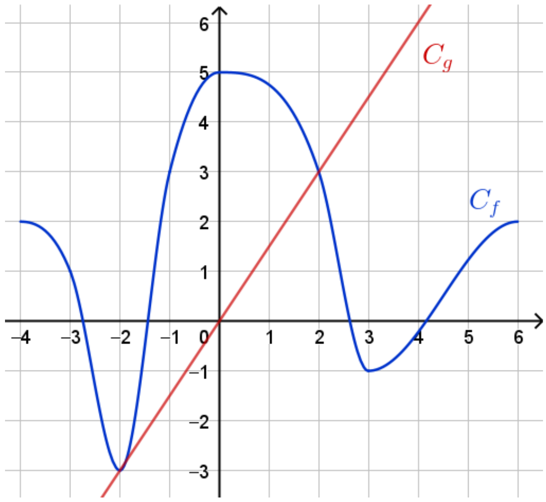
4a. (1 pt) Placer le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \vec{u}$.
On acceptera toute réponse cohérente avec la réponse donnée en question 1.

4b. (2 pts) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD} - 2\vec{v}$.

$\vec{w} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}15\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2-30\\5+10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-32\\15\end{pmatrix}$.

4c. (2 pts) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
On calcule leur déterminant : $\det(\vec{u};\vec{v}) = -6 \times (-5) - 2 \times 15 = 30 - 30 = 0$
Donc ces vecteurs sont colinéaires.
On acceptera aussi les calculs de rapport de colinéarité, ou tout autre raisonnement valide.

Partie 2 : Fonctions et variations (16 pts)



Exercice 1

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4; 6]$ et représentées ci-contre par les courbes C_f et C_g.

Toutes les réponses aux questions seront à donner par lecture graphique.

a. (2 pts) Lire $f(-3)$ = 1 et $f(0)$ = 5

b. (1 pt) Résoudre l'équation $(x) = g(x)$.

$S = \{-2; 2\}$. On acceptera d'autres formulations.

c. (1 pt) Combien de solutions l'équation $f(x) = 1$ admet-elle ? 4

d. (1 pt) Donner l'intervalle solution de l'inéquation $f(x) \geq 3$. $S = [-1; 2]$

e. (3 pts) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

x	-4		-2		0		3		6
f	2	↘	-3	↗	5	↘	-1	↗	2

Exercice 2

On donne ci-contre, le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; 7]$.

x	$-\infty$		-2		1		7
variations de f		↘	-8	↗	0	↘	-2

a. (1 pt) Lire $f(-2)$ = - 8

b. (1 pt) Peut-on dire que la fonction f admet un minimum ? Si oui, donner la valeur de ce minimum.

Oui, f admet -8 pour minimum.

c. (1 pt) Peut-on dire que la fonction f admet un maximum ? Si oui, donner la valeur de ce maximum.

Non, f n'admet pas de maximum.

d. (2 pts, une réponse non justifiée ne rapporte pas de points. On acceptera d'autres formulations)

Dans chaque cas, compléter avec < ou > en justifiant votre réponse :

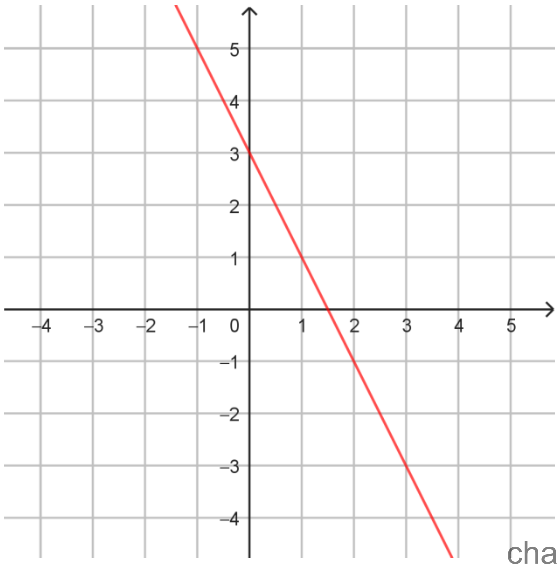
$f(2) > f(5)$
car f est décroissante sur $[2; 5]$

$f(-1) < f(0)$
car f est croissante sur $[-1; 0]$

Exercice 3 (3 pts) On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.

Représenter la fonction f dans le repère ci-contre.

On pourra s'aider d'un tableau de valeurs.



Partie 3 : Calcul algébrique (20 pts)

Exercice 1 On donne la fonction suivante : $f(x) = x^2 + 2x$.

a. (1 pt) Calculer $f(-7)$

$f(-7) = (-7)^2 + 2 \times (-7) = 49 - 14 = 35$

b. (2 pts) Calculer l'image de $\frac{5}{3}$ par la fonction f.

On demande la valeur exacte.

$f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9} + \frac{10}{3} = \frac{25}{9} + \frac{30}{9} = \frac{55}{9}$

c. (1 pt) Calculer $f(\sqrt{7})$.

On demande la valeur exacte.

$f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}^2 + 2\sqrt{7} = 7 + 2\sqrt{7}$

d. (2 pts) Le point A de coordonnées $(3; 15)$ appartient-il à la courbe représentative de f ? Justifier.

$f(3) = 3^2 + 2 \times 3 = 9 + 6 = 15$,

donc le point A appartient à C_f.

Exercice 2 (3 pts pour A, 2 pts pour B) Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = 3(7x - 2) + (5x - 1)(-x - 3)$

$A = 21x - 6 - 5x^2 - 15x + x + 3$

$A = -5x^2 + 7x - 3$

$B = (6x - 5)^2$

$B = (6x)^2 - 2 \times 5 \times 6x + 5^2$

$B = 36x^2 - 60x + 25$

Exercice 3 (2 pts par factorisation) Factoriser les expressions suivantes.

$C = 16x^2 + 24x + 9$

$C = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2$

$C = (4x + 3)^2$

$D = 81x^2 - 100$

$D = (9x)^2 - 10^2$

$D = (9x + 10)(9x - 10)$

Exercice 4 Une usine produit de l'acier. Elle peut produire jusqu'à 20 tonnes d'acier chaque jour.
Produire x tonnes d'acier pendant une journée coûte $C(x) = 30x^2 - 150x + 3\,780$ euros.

1. (1 pt) D'après la situation, à quel intervalle appartient x ? $x \in [0\,;20]$

2. (1 pt) Déterminer le coût de production pour 5 tonnes produites.

$C(5) = 30 \times 5^2 - 150 \times 5 + 3\,780 = 750 - 750 + 3780 = 3780€$

3. (1 pt) On suppose que chaque tonne produite est vendue au prix de 800 euros la tonne.
Déterminer les bénéfices réalisés par l'usine pour 5 tonnes produites.

On calcule $800 \times 5 - C(5) = 4\,000 - 3\,780 = 220€$

4. (2 pts) Montrer que les bénéfices journaliers réalisés pour x tonnes produites sont égaux à
$B(x) = -30x^2 + 950x - 3\,780$

$B(x) = 800x - C(x)$

$= 800x - (30x^2 - 150x + 3\,780)$

$= 800x - 30x^2 + 150x - 3\,780$

$= -30x^2 + 950x - 3780$

Partie 4 : Signe, équations & inéquations (14 pts)

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes :

a. (2 pts) $-x - 8 = 18x + 13$
$\Leftrightarrow -x - 18x = 8 + 13$
$\Leftrightarrow -19x = 21$
$\Leftrightarrow x = -\frac{21}{19}$
$S = \left\{-\frac{21}{19}\right\}$

b. (2 pts) $4x^2 - 26 = 10$
$\Leftrightarrow 4x^2 = 10 + 26$
$\Leftrightarrow 4x^2 = 36$
$\Leftrightarrow x^2 = 9$
$S = \{-3; 3\}$

Exercice 2 (3 pts) Résoudre et donner l'intervalle solution de l'inéquation suivante : $-9x + 1 \geq -5x + 13$
$\Leftrightarrow -9x + 5x \geq 13 - 1$
$\Leftrightarrow -4x \geq 12$
$\Leftrightarrow x \leq \frac{12}{-4}$
$\Leftrightarrow x \leq -3$
$S =]-\infty; -3]$

Exercice 3 (2 pts pour A, 3 pts pour B.
Les méthodes étant diverses, on n'attend pas de justification particulière)
Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes :

$A(x) = 8x - 12$

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$8x - 12$		$-$	0	$+$	

$B(x) = \frac{2x+10}{-x+8}$

x	$-\infty$		-5		8		$+\infty$
$2x + 10$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x + 8$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

En déduire la ou les solutions de l'équation $B(x) = 0$, et l'ensemble solution de l'inéquation $B(x) < 0$.
(1 pt) $B(x) = 0$: la solution est -5
(1 pt) $B(x) < 0$: l'ensemble solution est $]-\infty; -5[\cup]8; +\infty[$

Partie 5 : Probabilités, proportions, évolutions (14 pts)

Exercice 1

On considère un lycée où :

- 380 élèves sont en terminale ;
- parmi ces élèves de terminale, 55 % sont des filles ;
- le taux de réussite au baccalauréat dans cet établissement est de 85 % ;
- parmi les candidats ayant échoué, la proportion des filles est de $\frac{8}{19}$.

1 (3 pts : 1 pt pour chaque nombre en rouge, 1 pt pour le reste. La fraction $\frac{8}{19}$) n'est pas nécessaire pour remplir le tableau : elle permet de vérifier sa réponse)

Compléter le tableau des effectifs ci-contre regroupant les résultats au baccalauréat.

Élèves	Garçons	Filles	Total
Réussite	138	185	323
Échec	33	24	57
Total	171	209	380

2. (5 pts : 1 pt pour A, B et C, 2 pts pour D) Après la publication des résultats, on choisit au hasard un élève parmi l'ensemble des élèves de terminale.

On considère les événements suivants :

- G : « L'élève est un garçon. »
- R : « L'élève a eu son baccalauréat. ».

Calculer sous forme décimale la probabilité des événements, en arrondissant au centième si nécessaire.

a. $\bar{R}$

$$p(\bar{R}) = \frac{57}{380} = 0{,}15$$

b. $G \cap R$

$$p(G \cap R) = \frac{138}{380} \approx 0{,}36$$

c. $\bar{G} \cap R$

$$p(\bar{G} \cap R) = \frac{185}{380} \approx 0{,}49$$

d. $\bar{G} \cup R$

$$p(\bar{G} \cup R) = \frac{138 + 185 + 24}{380} \approx 0{,}91$$

Exercice 2

a. (2 pts) L'effectif d'un lycée de 1550 élèves va diminuer l'année prochaine de 4 %. Calculer le nouvel effectif.

$1\,550 \times 0{,}96 = 1\,488$. Le nouvel effectif sera de 1 488 élèves.

b. (2 pts : 1 pt résultat, 1 pt arrondi) La population d'une ville est passée de 8500 à 10300 entre 2018 et 2022. Calculer le taux d'évolution en pourcentage. Arrondir à 0,1%.

$$\frac{10\,300 - 8\,500}{8\,500} = \frac{1\,800}{8\,500} \approx 0{,}212 \text{ soit } +21{,}2\%.$$

c. (2 pts : 1 pt calcul, 1 pt réponse)

En 2020, la boulangerie-pâtisserie Aux délices a augmenté ses ventes de 14%.

En 2021, elle a diminué ses ventes de 9%.

Calculer le taux d'évolution des ventes sur les deux années.

$1{,}14 \times 0{,}91 = 1{,}0374$ donc sur les deux années, les ventes ont augmenté de 3,74%.