Chapitre 8 – Vecteurs du plan

1. Notion de vecteur

1a. Translation

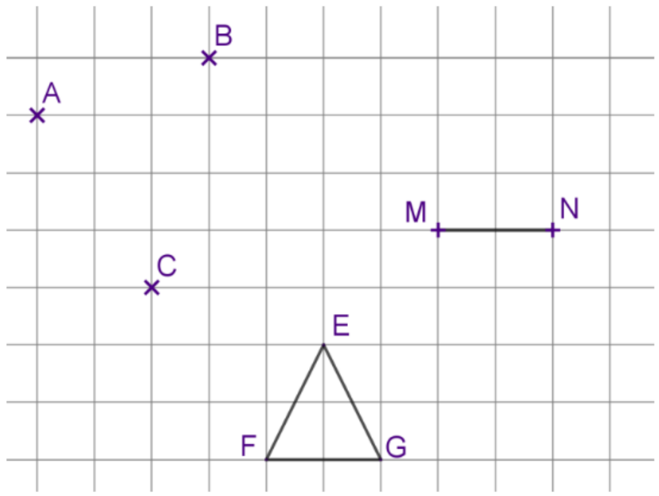
Définition : Soient A et B deux points distincts du plan.
La translation qui transforme A en B est une transformation qui à tout point C du plan, associe le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Dans la figure ci-contre :

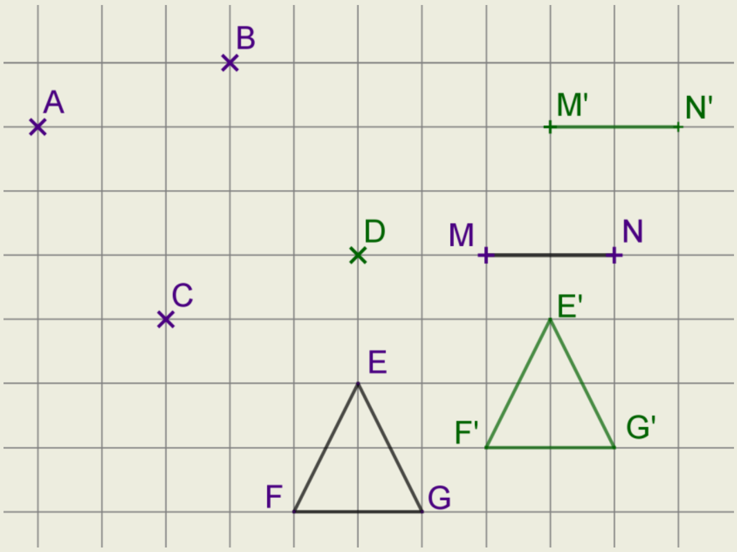
a. Tracer l'image D du point C par la translation qui transforme A en B.
Quel parallélogramme obtient-on ainsi ?

b. Tracer l'image $E'F'G'$ du triangle EFG par la translation qui transforme A en B.

c. Tracer l'image $[M'N']$ du segment $[MN]$ par la translation qui transforme F en E.



Ici, on peut tracer les images en ***comptant les carreaux*** *: la « translation qui transforme A en B » revient à se déplacer de 3 carreaux à droite, et de 1 carreau en haut.*



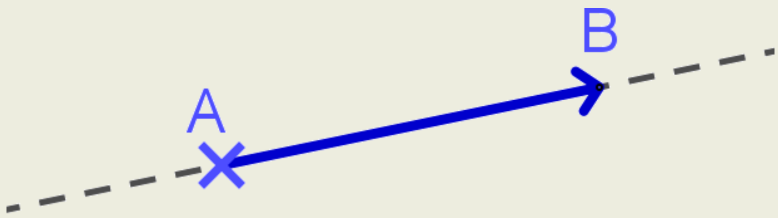
Ce raisonnement peut être appliqué pour les autres translations : la « translation qui transforme F en E » revient à se déplacer de 1 carreau à droite, et de 2 carreaux en haut.
C'est ainsi qu'on obtient $[M'N']$ en partant de $[MN]$.

a. On a obtenu le parallélogramme ***ABDC*** *(et non pas ABCD, attention : on doit pouvoir suivre le contour des quadrilatères quand on les nomme).*

1b. Définition

La translation qui transforme A en B est aussi appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. A est appelé l'origine, B est appelé l'extrémité de $\overrightarrow{AB}$.

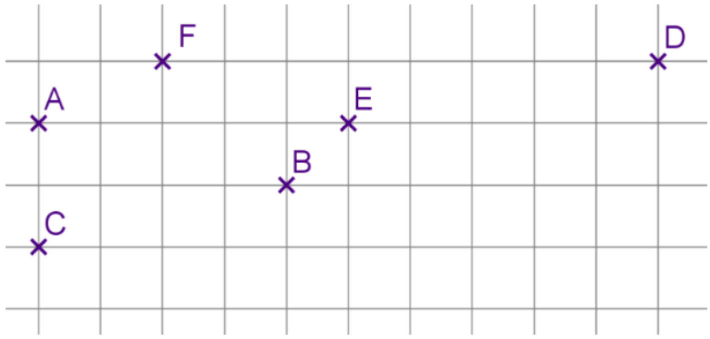
Un vecteur est défini par :
- sa direction : la droite (AB)
- son sens : de A vers B
- sa norme : la longueur AB



Rappel : pour deux points A et B :
$[AB]$ désigne un **segment**, AB désigne la **longueur** (en centimètres par exemple) de ce segment,
(AB) désigne une **droite** et $[AB)$ une **demi-droite**.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc un nouvel objet mathématique (comme les points, les droites, les segments…) qui représente un **déplacement**.

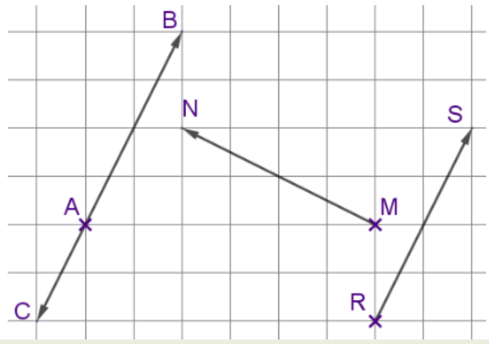
Exemple 1 Dans ce quadrillage, placer :

a. l'image C' du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
b. l'image B' du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
c. l'image D' du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
d. l'image E' du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$
e. l'image F' du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{BB}$

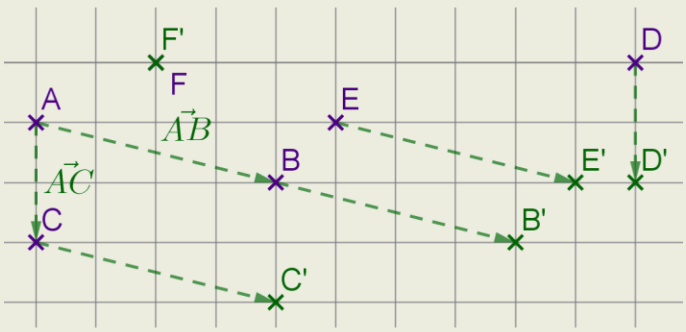


Remarque : un vecteur à origine et extrémité confondues (comme $\overrightarrow{BB}$) est appelé **vecteur nul**. On le note $\vec{0}$.

Exemple 2 On considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ci-contre.
Pour chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{RS}$, préciser s'ils ont la même direction, le même sens ou la même norme que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exemple 1 *Notez que le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ demandé en **d** est en fait le même vecteur que $\overrightarrow{AB}$ (on appellera cela plus tard un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$).*
On voit aussi que les points F et F' sont confondues, car le vecteur $\overrightarrow{BB}$ ne fait pas « bouger » le point (il s'agit d'un vecteur nul).



Exemple 2
- $\overrightarrow{AC}$ a la **même direction**, mais un **sens et une norme différents** de $\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{MN}$ a la **même norme**, mais une **direction différente** de $\overrightarrow{AB}$.

Il est donc impossible de toute façon que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ aient le même sens.
- $\overrightarrow{RS}$ a la **même direction**, le **même sens** et la **même norme** que $\overrightarrow{AB}$.

1c. Vecteurs égaux

Définition : Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont même direction, sens et norme.

Propriété : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Dans le quadrillage ci-contre :

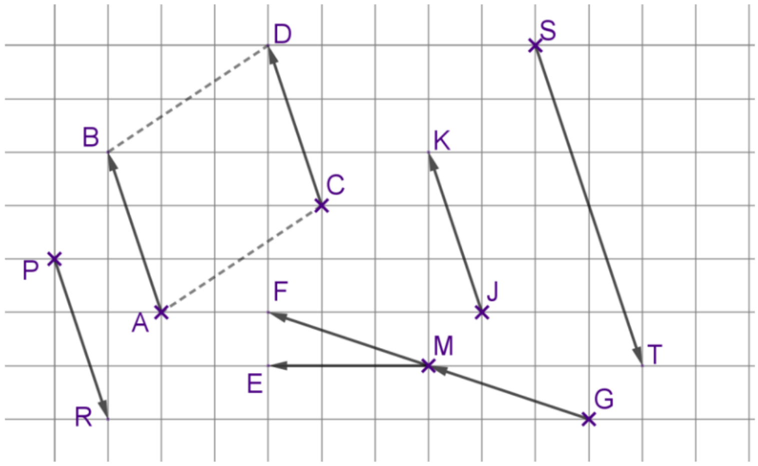
1. Quels sont les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$?

2. Que peut-on dire…

- **a.** de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{PR}$?
- **b.** de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{FM}$?
- **c.** de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{ST}$?

3. Que peut-on dire du quadrilatère $ABDC$? Justifier.
Citer un autre quadrilatère ayant la même propriété.

4. Citer deux autres vecteurs égaux.
Que peut-on alors dire du point M ?



1. Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ sont $\boldsymbol{\overrightarrow{CD}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{JK}}$.

2
- **a.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PR}$ ont **même direction et norme**, mais **pas le même sens**.
- **b.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FM}$ ont **même norme**, mais **pas la même direction**.
- **c.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ST}$ ont **même direction**, mais **pas la même norme ni sens**.

3.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc $ABDC$ est un **parallélogramme**.
- De même, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JK}$, donc $\boldsymbol{ABKJ}$ est un **parallélogramme**.

4. $\boldsymbol{\overrightarrow{GM}} = \boldsymbol{\overrightarrow{MF}}$. Cela signifie que M est le **milieu du segment** $[\boldsymbol{FG}]$.

1d. Représentants

On peut désigner un vecteur par une seule lettre, comme $\vec{u}$. Si d'autres vecteurs sont égaux à $\vec{u}$, on les appelle les représentants du vecteur $\vec{u}$.

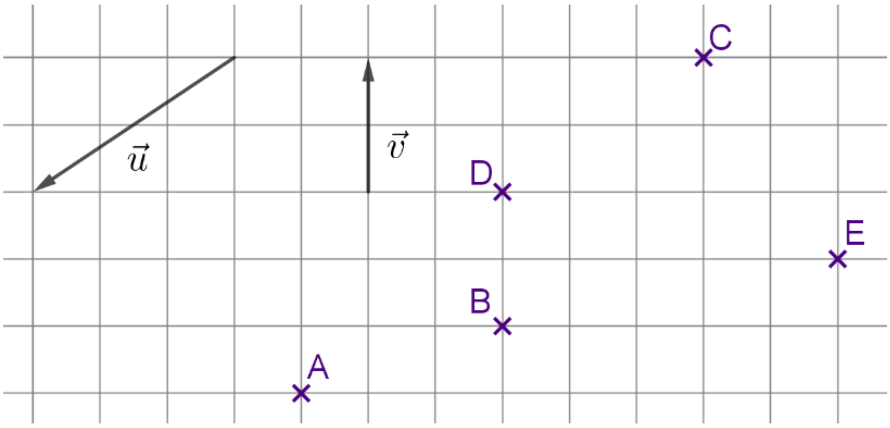
Dans la figure ci-contre :

a. Tracer un représentant de $\vec{u}$ avec les points déjà placés.

b. Tracer un représentant de $\vec{v}$ avec les points déjà placés.

c. Placer A', image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$.

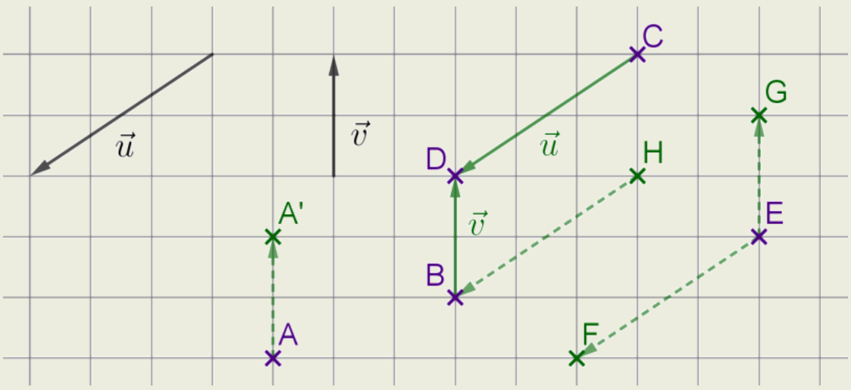
d. Placer :
- le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \vec{u}$
- le point G tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EG}$
- le point H tel que $\overrightarrow{HB} = \vec{u}$



c. *Pour placer A', on part de A et on suit le vecteur $\vec{v}$, c'est-à-dire qu'on « monte de deux carreaux » comme le fait $\vec{v}$.*

d.

• *Pour placer F, c'est la même consigne : on part de E et on suit le vecteur $\vec{u}$.*



• *Idem pour placer G : on part de E et on suit le vecteur $\overrightarrow{BD}$.*

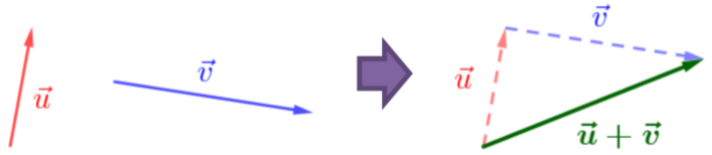
• *Pour placer H, c'est différent : il faut qu'on retrouve $\vec{u}$ en allant de H à B. On part donc de B mais on suit $\vec{u}$ dans l'autre sens.*

2. Opérations sur les vecteurs

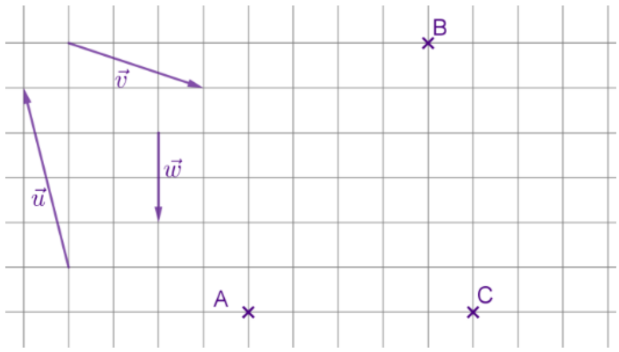
2a. Somme

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur correspondant à l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

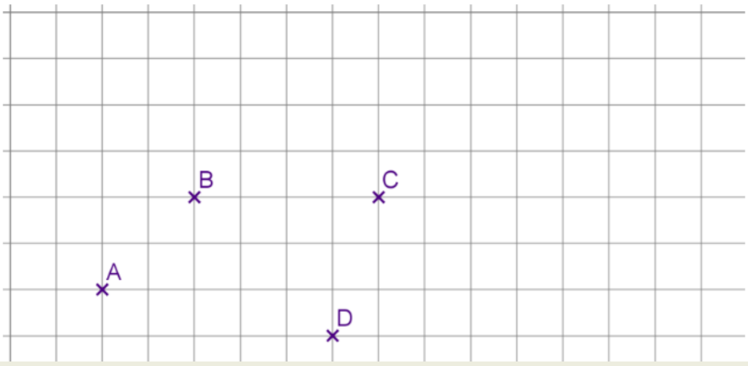
Pour tracer le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, on peut utiliser en traits de construction un représentant de $\vec{u}$ puis un représentant de $\vec{v}$ dont l'origine est placée sur l'extrémité de $\vec{u}$.



Exemple 1 Dans la figure ci-contre :
a. Tracer un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ d'origine A.
b. Placer B', image de B par la translation de vecteur $\vec{v} + \vec{w}$.
c. Placer le point M tel que $\overrightarrow{CM} = \vec{u} + \vec{w}$

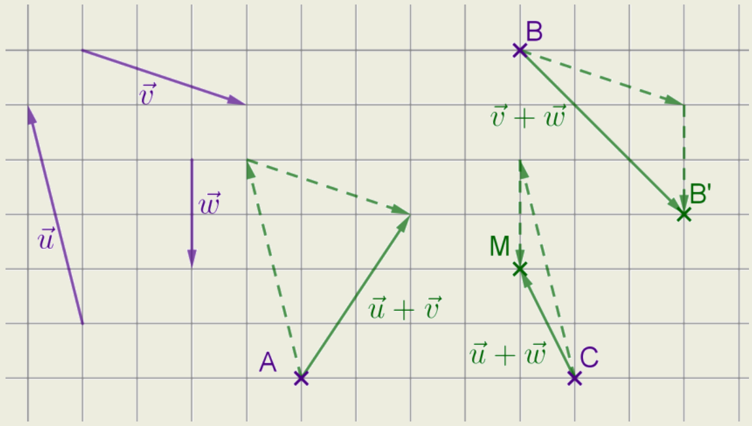


Exemple 2 Dans la figure ci-contre :
a. Placer le point M tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.
b. Placer le point N, image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$.
c. Placer le point P tel que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$.

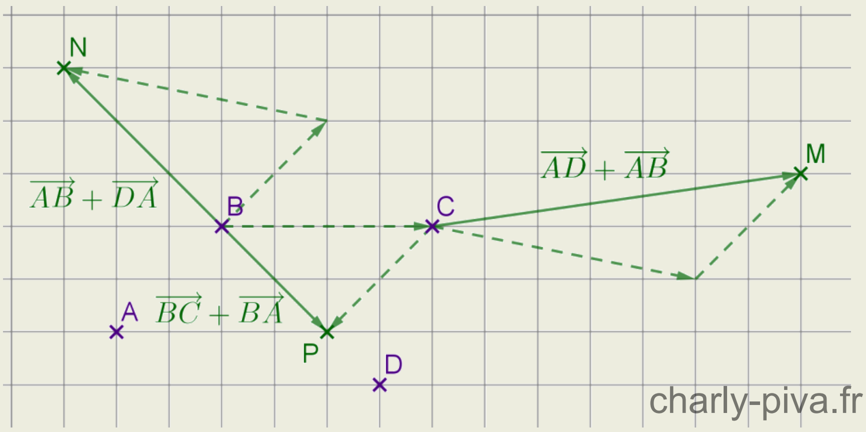


Exemple 1

Les pointillés représentent les traits de construction : par exemple, pour tracer un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ d'origine A : on part de A, on trace un représentant de $\vec{u}$,
puis on trace un représentant de $\vec{v}$ en partant de l'extrémité de $\vec{u}$.



Exemple 2



2b. Vecteur opposé

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$. Le vecteur opposé $-\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction, même norme, mais de sens contraire.

L'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Exemple

Dans la figure ci-contre :

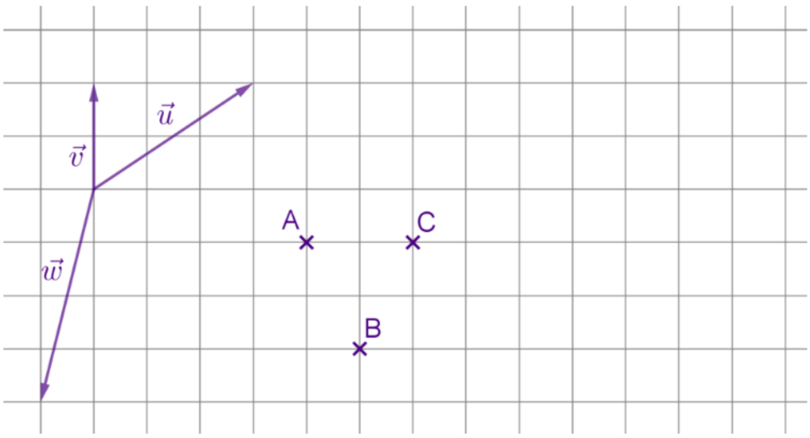
a. Tracer un représentant de $-\vec{u}$ d'origine A.

b. Placer B', image de B par la translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.

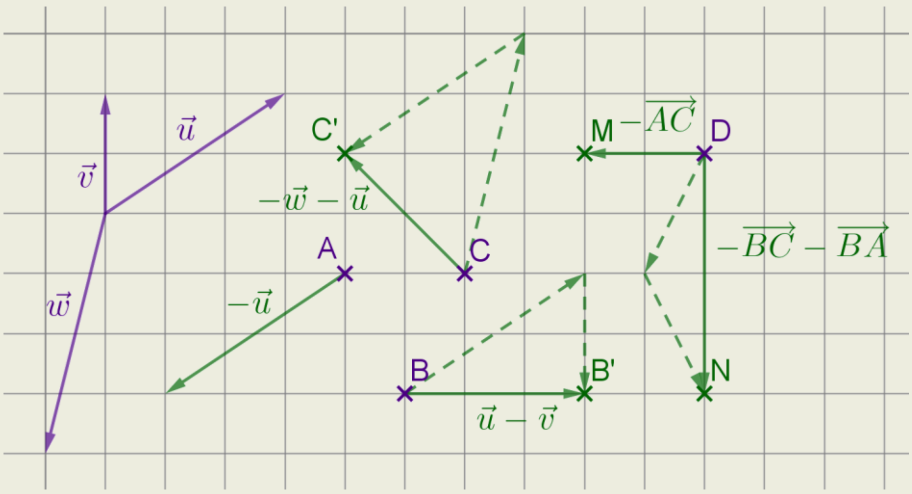
c. Placer le point C' tel que $\overrightarrow{CC'} = -\vec{w} - \vec{u}$.

d. Placer le point M tel que $\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{AC}$.

e. Placer le point N tel que $\overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.



Pour tracer $-\vec{u}$, il suffit donc de tracer $\vec{u}$, mais dans l'autre sens, c'est-à-dire qu'on se déplace « en bas à gauche » plutôt qu'« en haut à droite ».



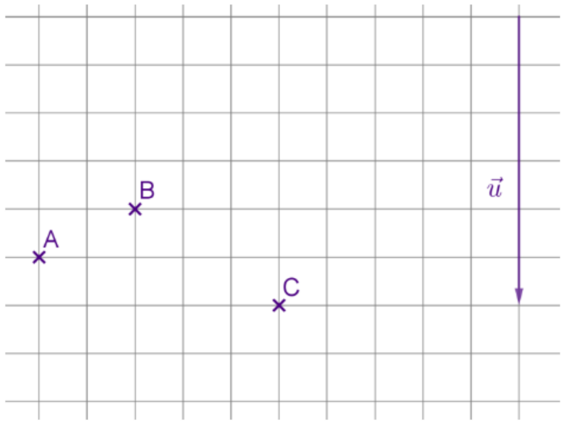
2c. Multiplication par un réel

Définition : Soient un vecteur $\vec{u}$, et un réel k. Le vecteur $k\vec{u}$ a :

- si k est positif : même sens, norme k fois plus grande,
- si k est négatif : sens contraire, norme $-k$ fois plus grande.
- si $k = 0$, c'est le vecteur nul $\vec{0}$.

Exemple 1 Dans la figure ci-contre, placer :

- le point M tel que $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{AB}$
- le point N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$
- le point P tel que $\overrightarrow{CP} = -2\overrightarrow{AB}$
- le point R tel que $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$
- le point S tel que $\overrightarrow{AS} = -\frac{2}{3}\vec{u}$



Exemple 2 Sur la droite ci-dessous :

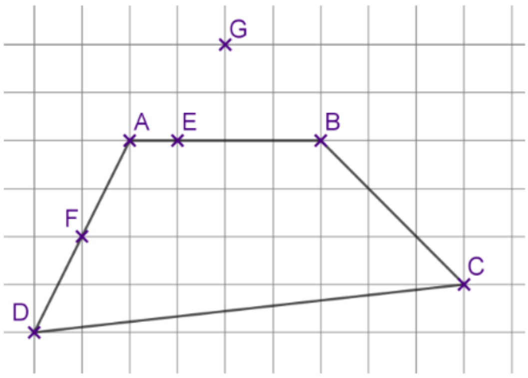
a. Compléter : $\overrightarrow{BC}$ = ... $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}$ = ... $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}$ = ... $\overrightarrow{AB}$

b. Placer :
- E tel que $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB}$
- F tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$
- G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$
- H tel que $\overrightarrow{DH} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

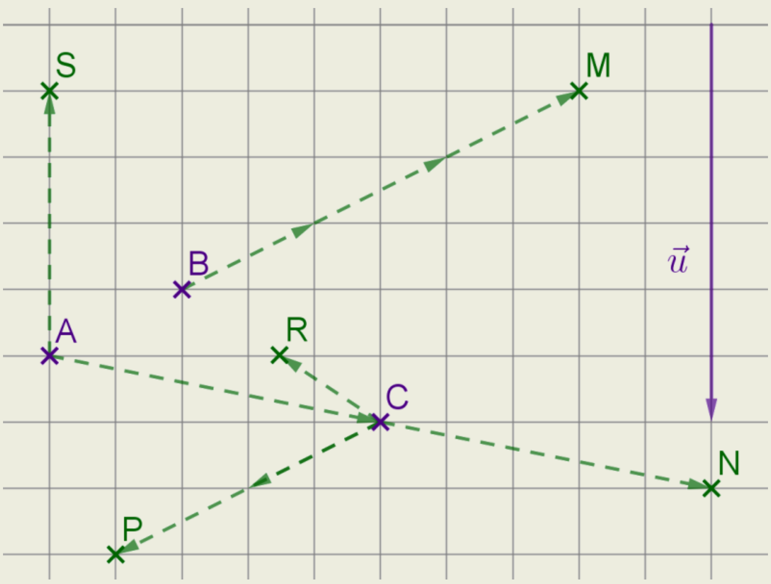
Exemple 3 Dans cette figure :

a. Compléter : $\overrightarrow{AE}$ = ... $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DF}$ = ... $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BG}$ = ... $\overrightarrow{BC}$

b. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$



Exemple 1



Exemple 2

a. *La norme de* $\overrightarrow{BC}$ *est 3 fois plus grande que celle de* $\overrightarrow{AB}$*, donc* $\overrightarrow{BC} = \mathbf{3}\overrightarrow{AB}$.

Réciproquement, la norme de $\overrightarrow{AB}$ *est 3 fois plus petite que celle de* $\overrightarrow{BC}$ *:* $\overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{BC}$.

Quant à $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AB}$*, leur sens est opposé, donc on recherche un nombre négatif.*

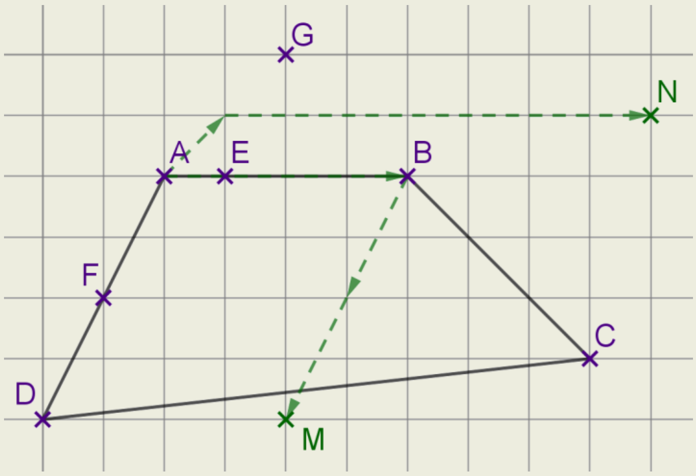
La norme de $\overrightarrow{AD}$ *est de 5 carreaux, celle de* $\overrightarrow{AB}$ *est de 2 carreaux.* $\overrightarrow{AD} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{AB}$.

b.

Exemple 3

a. $\overrightarrow{AE} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DF} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BG} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{BC}$.

b.



2d. Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Cela signifie qu'ils ont même direction.

Propriétés :

• deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

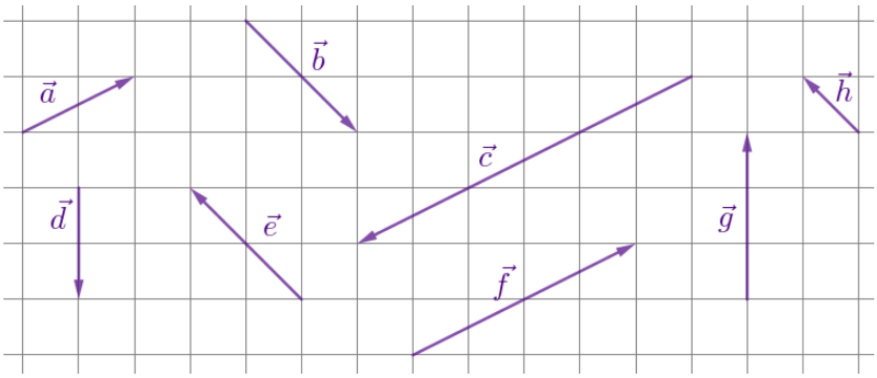
• trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On considère la figure ci-contre.

a. Compléter $\vec{c} = \ldots\ldots\ \vec{a}$ et en déduire $\vec{a} = \ldots\ldots\ \vec{c}$.
Que peut-on alors dire de $\vec{a}$ et $\vec{c}$?

b. Trouver un autre vecteur colinéaire à $\vec{a}$ et l'exprimer par une égalité.

c. Trouver tous les autres vecteurs colinéaires de la figure et exprimer cette colinéarité à l'aide d'égalités.



a. $\vec{c} = -3\vec{a}$ et ainsi $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{c}$. On en déduit que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont **colinéaires**.

b. $\vec{f} = 2\vec{a}$ (et réciproquement, $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{f}$), donc $\vec{a}$ **et** $\vec{f}$ sont colinéaires.

c. • $\vec{d}$ et $\vec{g}$ sont colinéaires. On a par exemple $\vec{g} = -\frac{3}{2}\vec{d}$ (ou bien $\vec{d} = -\frac{2}{3}\vec{g}$).

• $\vec{b}$; $\vec{e}$ et $\vec{h}$ sont colinéaires. On a par exemple $\vec{b} = -\vec{e}$ et $\vec{h} = \frac{1}{2}\vec{e}$.

2e. Relation de Chasles et opérations

- Relation de Chasles : Soient trois points A, B et C. Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- Distributivité : pour tout $k\in\mathbb{R}$ et vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

Exemple 1 Compléter à l'aide de la relation de Chasles :

a. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\ldots M}+\overrightarrow{\ldots B}$ **b.** $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{\ldots\quad\ldots}$ **c.** $\overrightarrow{I\ldots}+\overrightarrow{J\ldots}=\overrightarrow{\ldots K}$

Exemple 2 Simplifier les expressions suivantes.

a. $-7\vec{u}+3\times4\vec{u}$ **b.** $-8\vec{v}+\vec{u}+2(\vec{u}-\vec{v})$ **c.** $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{AC}$

Exemple 3 Tracer un triangle ABC, puis placer le point M tel que $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Exemple 4 Dans chaque cas, démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a. $u=2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=-10\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)$ **b.** $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=4\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}$.

Exemple 1 **a.** $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\overrightarrow{AM}}+\boldsymbol{\overrightarrow{MB}}$ **b.** $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PS}+\boldsymbol{\overrightarrow{SR}}$ **c.** $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{IK}$

Exemple 2 **a.** $-7\vec{u}+3\times4\vec{u}=-7\vec{u}+12\vec{u}=\boldsymbol{5\vec{u}}$

b. $-8\vec{v}+\vec{u}+2(\vec{u}-\vec{v})=-8\vec{v}+\vec{u}+2\vec{u}-2\vec{v}=\boldsymbol{3\vec{u}-10\vec{v}}$

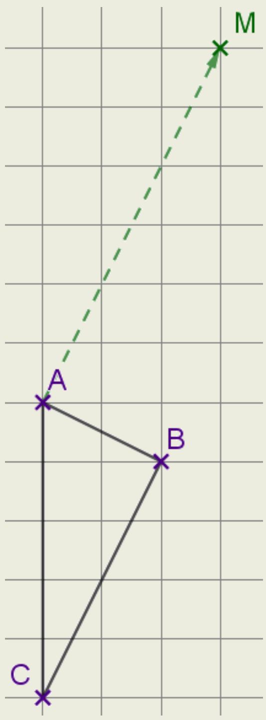
c. $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{AC}$ *On décompose $3\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$*

$=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{AC}$ *On factorise par 2*

$=\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)-5\overrightarrow{AC}$ *On applique la relation de Chasles sur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$*

$=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{AC}$

$=\boldsymbol{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{AC}}$



Exemple 3

L'égalité $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ se réécrit

$$2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\boldsymbol{\overrightarrow{AM}}=-\boldsymbol{\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}}$$

On peut maintenant placer M.

Exemple 4

a. $\vec{v}=-10\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=-10\overrightarrow{AB}=-5\times2\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{-5\vec{u}}$

b. $\vec{v}=4\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}=-2(-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})=\boldsymbol{-2\vec{u}}$

3. Repère et coordonnées

3a. Coordonnées d'un vecteur

Dans le plan, on peut définir un repère par un point O appelé origine, et deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$, chaque vecteur $\vec{u}$ est repéré par ses coordonnées $(x\ ;y)$ telles que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$. On note $\vec{u}(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Exemple 1 Dans le repère ci-contre :

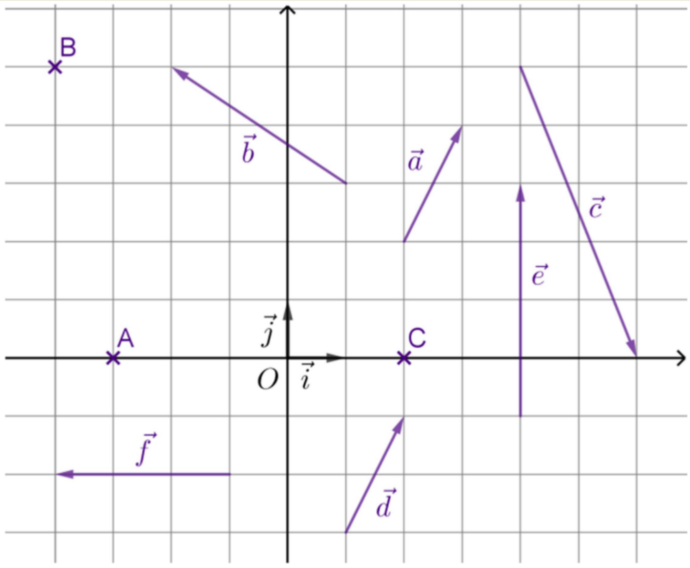
a. Lire les coordonnées des points :

A B C

b. Lire les coordonnées des vecteurs :

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ $\vec{d}$

$\vec{e}$ $\vec{f}$ $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BA}$



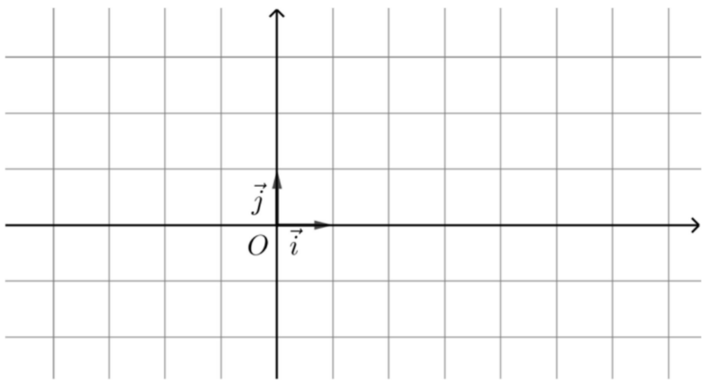
Exemple 2 Dans le repère ci-contre :

a. Placer les points $A(6;2)$ et $B(2;-1)$.

b. Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ d'origine A.

d. Placer le point $M(-3;2)$ puis tracer le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Quelles sont ses coordonnées ?



Exemple 1

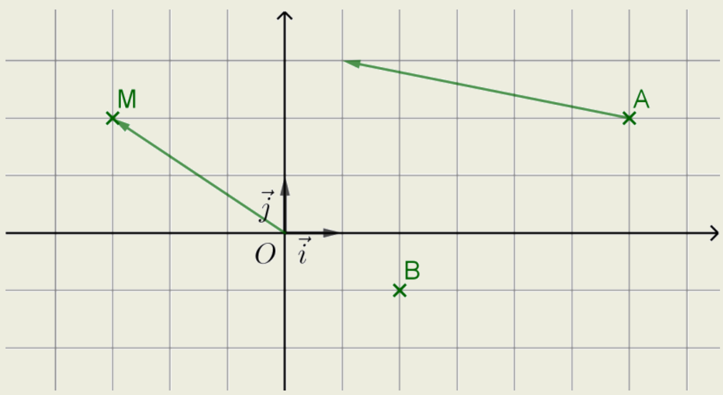
a. $A(-3;0)$; $B(-4;5)$ et $C(2;0)$.

b. $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{c}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$; $\vec{d}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{e}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$; $\vec{f}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

Exemple 2

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$

d. $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$: ce sont les mêmes coordonnées que celles du point M.



3b. Opérations avec les coordonnées

Propriété : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, et $k \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
- $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

Exemple Dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$; $3\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$ et $\vec{v}-\vec{w}$.

- $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+8\\-4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{9}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$
- $3\vec{v}=3\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 8\\3\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{24}\\\mathbf{15}\end{pmatrix}$
- $\vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-8\\-4-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-7}\\\mathbf{-9}\end{pmatrix}$
- $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-(-7)\\5-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{15}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}$

3c. Vecteurs et points

Propriétés :

• Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

• Soient $A(x_A; y_A)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ un vecteur.

Alors l'image A' du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $A'(x_A + x_{\vec{u}}\,; y_A + y_{\vec{u}})$

Exemple 1 Dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère les points $A(1;5)$ et $B(7;3)$, ainsi que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. En déduire celles du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

b. Calculer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

Exemple 2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
On considère $C(-3;2)$, $D(1;4)$ et $E(6;3)$ trois points et $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur.

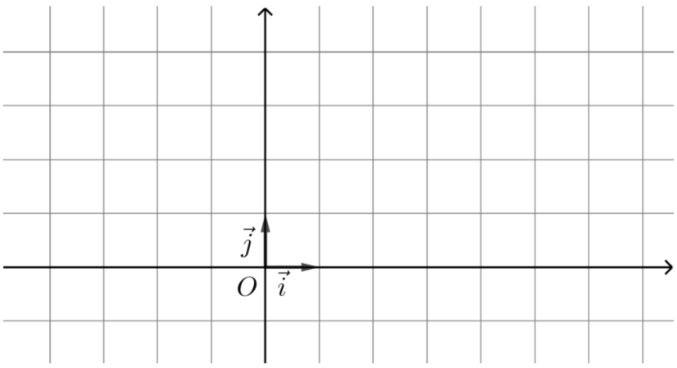
a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

b. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} - \overrightarrow{CD}$.

c. Calculer les coordonnées du vecteur $-7\vec{w}$.

d. Calculer les coordonnées du vecteur $-3\overrightarrow{DE}$.

e. Calculer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DC}$.



Exemple 1

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7-1 \\ 3-5 \end{pmatrix}$ soit $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}\begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ étant l'opposé de $\overrightarrow{AB}$, on en déduit $\boldsymbol{\overrightarrow{BA}}\begin{pmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

b. $C(1 + (-6); 5 + 2)$ et ainsi $\boldsymbol{C(-5;7)}$.

Exemple 2

a. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 4-2 \end{pmatrix}$ soit $\boldsymbol{\overrightarrow{CD}}\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

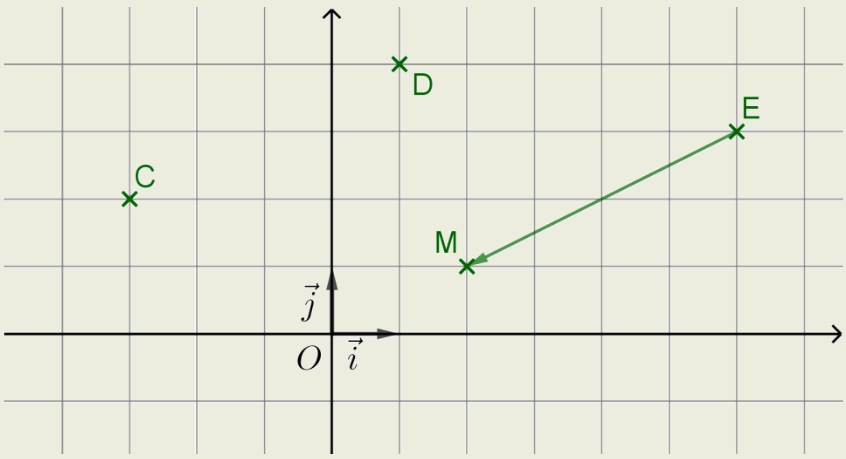
b. $\vec{w} - \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

c. $-7\vec{w} - \overrightarrow{CD} = -7\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{-21} \end{pmatrix}$

d. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 6-4 \\ 3-4 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $-3\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$

e. $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc $M(6 + (-4); 3 + (-2))$ et ainsi $\boldsymbol{M(2;1)}$.



3d. Distance, milieu, norme

Propriétés : Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points.

- le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$
- la distance AB est égale à $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
- soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur. Sa norme est $||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$.

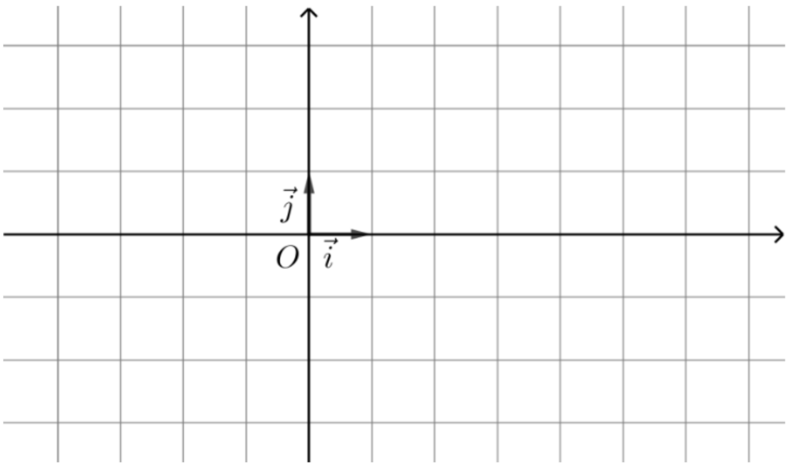
Exemple Dans ce repère, placer les points $A(6;2)$, $B(2;-3)$ et $C(-4;-1)$.

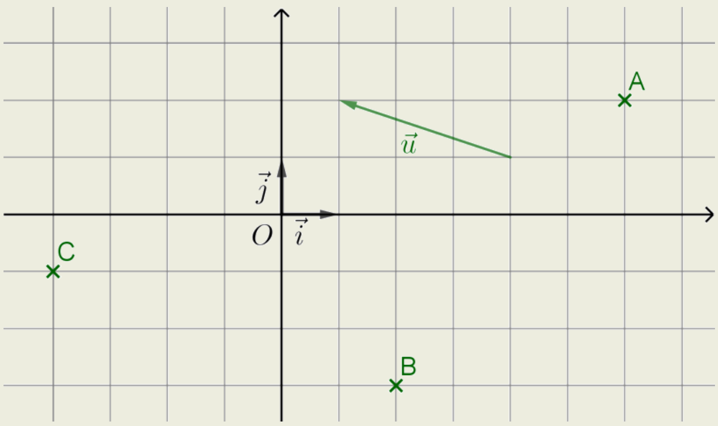
Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

a. Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[BC]$.

b. Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.

c. Calculer la distance AB.





a.

$$M\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{2+(-4)}{2};\frac{(-3)+(-1)}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{-2}{2};\frac{-4}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M(-1;-2)}$$

b.

$$||\vec{u}||=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{\mathbf{10}}$$

c.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$=\sqrt{(2-6)^2+(-3-2)^2}$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-5)^2}$$

$$=\sqrt{16+25}$$

$$=\sqrt{\mathbf{41}}$$

3e. Déterminant

Propriété : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un $k \in \mathbb{R}$ tel que $x' = kx$ et $y' = ky$.

Définition : Le déterminant de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

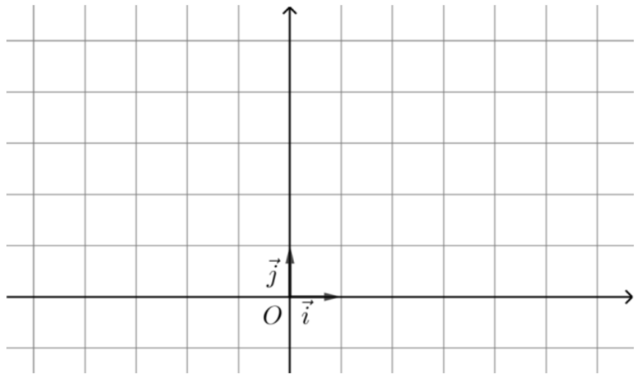
est le nombre $\det(\vec{u};\vec{v}) = xy' - x'y$.

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si leur déterminant vaut 0.

Remarque : le déterminant correspond en fait au **produit en croix** entre les coordonnées.
Deux vecteurs sont donc **colinéaires** si **leurs coordonnées sont proportionnelles**.

Exemple 1 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}21\\-9\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-14\\6\end{pmatrix}$. Lesquels sont colinéaires ?

Exemple 2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
On considère les points $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(-4;4)$ et $D(6;-1)$.
a. Prouver que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
b. Les points A, B et C sont-ils alignés?



Exemple 1 On calcule les déterminants de ces paires de vecteurs.

• $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 21 \times (-3) - -9 \times (-10) = -63 - 90 = \mathbf{-153} \neq 0$

donc $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ ne sont **pas colinéaires**.

• $\det(\vec{u}\,;\vec{w}) = 21 \times 6 - -9 \times (-14) = 126 - 126 = \mathbf{0}$

donc $\vec{u}$ **et** $\vec{w}$ sont **colinéaires**.

• On en déduit que $\vec{v}$ **et** $\vec{w}$ ne sont **pas colinéaires** non plus.

Exemple 2

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\1-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

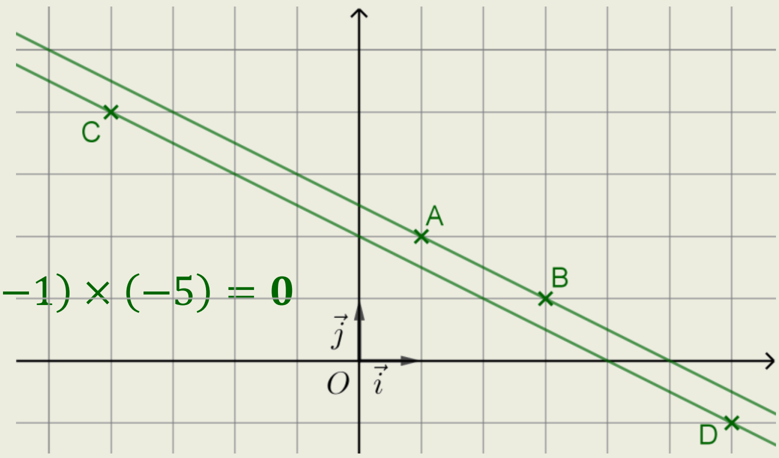
et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-(-4)\\-1-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD})$

$= 2 \times 10 - (-1) \times (-5) = \mathbf{0}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires,

donc $(\boldsymbol{AB})//(\boldsymbol{CD})$.



b. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4-1\\4-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = 2 \times 2 - (-1) \times (-5) = 4 - 5 = \mathbf{-1} \neq 0$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont **pas alignés**.