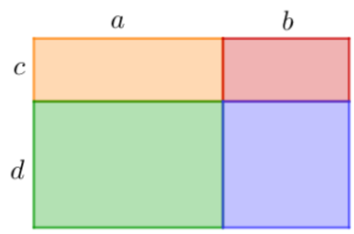
Chapitre 7 – Identités remarquables et applications

1. Distributivité

1a. Développement double

Rappel : Pour tous a, b, c, d réels : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Remarque Cette propriété peut être vue comme une égalité d'aires.
Le rectangle a pour longueur $(a+b)$ et pour largeur $(c+d)$,
donc son aire est $(a+b)(c+d)$.
Mais son aire est aussi la somme des aires des petits rectangles : $ac + ad + bc + bd$.
Ainsi, $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$



Exemple Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (x+9)(3-2x)$ $\quad B = (y-2)(3-x)$ $\quad C = 5(3x+1)(x-2)$

$D = (2x-1)(x^2+3)$ $\quad E = 4(1-7y) + (4y-5)(y-1)$ $\quad F = -(1-y)(y-7)$

$G = \frac{7}{3}(6x-3)(15x-1)$ $\quad H = -x(x-4)(7x+1)$

En développant, on peut choisir de déterminer le signe des produits dès le début.
Par exemple dans le développement A, *le produit* $\mathbf{x} \times (-\mathbf{2x})$ *se réécrit directement* $-\mathbf{x} \times \mathbf{2x}$.
Idem pour le produit $-\mathbf{2} \times (-\mathbf{x})$ *du développement* B *qui vaut directement* $\mathbf{2x}$.

$A = (x+9)(3-2x)$
$A = x \times 3 - x \times 2x + 9 \times 3 - 9 \times 2x$
$A = 3x - 2x^2 + 27 - 18x$
$A = \mathbf{-2x^2 - 15x + 27}$
On ordonne en écrivant d'abord le terme en x^2*, puis le terme en* x *et enfin le terme constant.*

$B = (y-2)(3-x)$
$B = y \times 3 - y \times x - 2 \times 3 + 2 \times x$
$B = \mathbf{3y - xy - 6 + 2x}$
Ici, il n'y a pas d'ordre « classique » pour les termes en x*, en* y*, en* xy*…*

$C = 5(3x+1)(x-2)$
On a un développement simple, et un double. On peut les effectuer dans l'ordre de notre choix, mais le plus facile est de commencer par développer le 5 *avec la première parenthèse. On écrit bien le résultat de ce développement simple* ***entre parenthèses****, pour développer ensuite avec la deuxième parenthèse.*
$C = (15x+5)(x-2)$

$C = 15x \times x - 15x \times 2 + 5 \times x - 5 \times 2$
$C = 15x^2 - 30x + 5x - 10$
$C = \mathbf{15x^2 - 25x - 10}$

$D = (2x - 1)(x^2 + 3)$
$D = 2x \times x^2 + 2x \times 3 - 1 \times x^2 - 1 \times 3$
$D = 2x^3 + 6x - x^2 - 3$
$D = \mathbf{2x^3 - x^2 + 6x - 3}$

On effectue le développement simple et le développement double en parallèle, puis on ajoute les résultats des deux développements.
$E = 4(1 - 7y) + (4y - 5)(y - 1)$
$E = 4 \times 1 - 4 \times 7y + 4y \times y - 4y \times 1 - 5 \times y + 5 \times 1$
$E = 4 - 28y + 4y^2 - 4y - 5y + 5$
$E = \mathbf{4y^2 - 37y + 9}$

*On se rappelle bien que si **un signe – est placé devant une parenthèse**, on peut le supprimer en **changeant les signes** du contenu de la parenthèse.*
$F = -(1 - y)(y - 7)$
$F = (-1 + y)(y - 7)$
$F = -1 \times y + 1 \times 7 + y \times y - y \times 7$
$F = -y + 7 + y^2 - 7y$ *Autre rappel :* $-y = -1y$. *Ainsi* $-y - 7y = -8y$.
$F = \mathbf{y^2 - 8y + 7}$

$G = \frac{7}{3}(6x - 3)(15x - 1)$
$G = \left(\frac{7}{3} \times 6x - \frac{7}{3} \times 3\right)(15x - 1)$
Pour calculer $\frac{7}{3} \times 6$, *on le réécrit* $\frac{7}{3} \times 3 \times 2$ *et on peut barrer les 3.*
Idem pour $\frac{7}{3} \times 3$ *: on peut directement barrer les 3.*
$G = (14x - 7)(15x - 1)$
$G = 14x \times 15x - 14x \times 1 - 7 \times 15x + 7 \times 1$
$G = 210x^2 - 14x - 105x + 7$
$G = \mathbf{210x^2 - 119x + 7}$

Comme dans le développement C, on commence par distribuer le – x à la première parenthèse.
$H = -x(x - 4)(7x + 1)$
$H = (-x^2 + 4x)(7x + 1)$
$H = -x^2 \times 7x - x^2 \times 1 + 4x \times 7x + 4x \times 1$
$H = -7x^3 - x^2 + 28x^2 + 4x$
$H = \mathbf{-7x^3 + 27x^2 + 4x}$

1b. Factorisation

Rappel : Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Exemple 1 Factoriser les expressions suivantes.

$A = 7x + 42$ $\quad B = 5x^2 - 9x$ $\quad C = 4x^3 - 7x^2 + x$ $\quad D = 3a^2 - 12a$

Remarque : on peut aussi factoriser par une somme ou une différence entre parenthèses.

Exemple 2 Factoriser les expressions suivantes.

$A = (2x+1)(3x+2) + (4x+7)(2x+1)$ $\quad B = (x-2)(x-1) - (2x+7)(x-2)$

$C = 3x(2x+5) - (x-7)(2x+5)$ $\quad D = 7y(y+1) - (y+1)^2$

Exemple 1 *Pour factoriser une somme/différence, il faut écrire ses deux termes comme un produit comportant le même facteur, qui sera le **facteur commun**.*

$A = 7x + 42 = \mathbf{7} \times x + \mathbf{7} \times 6 = \mathbf{7(x+6)}$

$B = 5x^2 - 9x = \boldsymbol{x} \times 5x - \boldsymbol{x} \times 9 = \boldsymbol{x(5x-9)}$

$C = 4x^3 - 7x^2 + x = \boldsymbol{x} \times 4x^2 - \boldsymbol{x} \times 7x + \boldsymbol{x} \times 1 = \boldsymbol{x(4x^2 - 7x + 1)}$

Notez que pour obtenir la factorisation, il a fallu écrire le x *sous la forme* $x \times 1$.

$D = 3a^2 - 12a = \boldsymbol{3a} \times a - \boldsymbol{3a} \times 4 = \boldsymbol{3a(a-4)}$

On peut factoriser par 3 *ou par* a *séparément, mais la meilleure factorisation possible est par* 3a.

Exemple 2 *Dans cet exemple, le facteur commun est visible dès le début : c'est une somme ou une différence entre parenthèses.*

$A = (\boldsymbol{2x+1})(3x+2) + (4x+7)(\boldsymbol{2x+1})$

$A = (2x+1)\big((3x+2) + (4x+7)\big)$

Ici, les parenthèses sont séparées par un signe + : on ne change pas les signes.

$A = (2x+1)(3x+2+4x+7)$

$A = \boldsymbol{(2x+1)(7x+9)}$

$B = (\boldsymbol{x-2})(x-1) - (2x+7)(\boldsymbol{x-2})$

$B = (x-2)\big((x-1) - (2x+7)\big)$

Ici, on change les signes de la deuxième parenthèse, qui est précédée d'un signe −.

$B = (x-2)(x-1-2x-7)$

$B = \boldsymbol{(x-2)(-x-8)}$

$C = 3x(\boldsymbol{2x+5}) - (x-7)(\boldsymbol{2x+5})$

$C = (2x+5)\big(3x - (x-7)\big)$

$C = (2x+5)(3x - x + 7)$

$C = \boldsymbol{(2x+5)(2x+7)}$

$D = 7y(y+1) - (y+1)^2$

$D = 7y(\boldsymbol{y+1}) - (\boldsymbol{y+1})(y+1)$

$D = (y+1)\big(7y - (y+1)\big)$

$D = (y+1)(7y - y - 1)$

$D = \boldsymbol{(y+1)(6y-1)}$

1c. Manipulation de fractions

Exemple 1 Simplifier les quotients.

$$A = \frac{5x^2 + 4x}{x^2} \qquad B = \frac{4x^2 - 6x + 10}{10x - 30} \qquad C = \frac{3x - 15}{-8x + 40}$$

Exemple 2 Écrire sous la forme d'une seule fraction.

$$A = \frac{7}{x} - \frac{5}{x-2} \qquad B = 4 + \frac{3}{x+1} \qquad C = \frac{2}{x+3} + \frac{5}{2x-7} \qquad D = \frac{2x-1}{x-5} - \frac{4x+1}{2x}$$

Exemple 1 *Pour simplifier une fraction, il faut* ***factoriser par le même nombre au numérateur et au dénominateur****.*

$$A = \frac{5x^2 + 4x}{x^2} = \frac{\boldsymbol{x}(5x+4)}{\boldsymbol{x} \times x} = \frac{\mathbf{5x+4}}{\boldsymbol{x}}$$

$$B = \frac{4x^2 - 6x + 10}{10x - 30} = \frac{\mathbf{2}(2x^2 - 3x + 5)}{\mathbf{2}(5x - 15)} = \frac{\mathbf{2x^2 - 3x + 5}}{\mathbf{5x - 15}}$$

$$C = \frac{3x - 15}{-8x + 40} = \frac{3(\boldsymbol{x - 5})}{-8(\boldsymbol{x - 5})} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$$

Exemple 2

$$A = \frac{7}{x} - \frac{5}{x-2}$$

$$A = \frac{7(\boldsymbol{x-2})}{x(\boldsymbol{x-2})} - \frac{5 \times \boldsymbol{x}}{(x-2) \times \boldsymbol{x}}$$

$$A = \frac{7(x-2) - 5x}{x(x-2)}$$

$$A = \frac{7x - 14 - 5x}{x(x-2)}$$

$$A = \frac{\mathbf{2x - 14}}{\boldsymbol{x(x-2)}}$$

$$B = 4 + \frac{3}{x+1}$$

$$B = \frac{4(\boldsymbol{x+1})}{\boldsymbol{x+1}} + \frac{3}{x+1}$$

$$B = \frac{4(x+1) + 3}{x+1}$$

$$B = \frac{4x + 4 + 3}{x+1}$$

$$B = \frac{\mathbf{4x + 7}}{\boldsymbol{x+1}}$$

$$C = \frac{2}{x+3} + \frac{5}{2x-7}$$

$$C = \frac{2(\boldsymbol{2x-7})}{(x+3)(\boldsymbol{2x-7})} + \frac{5(\boldsymbol{x+3})}{(2x-7)(\boldsymbol{x+3})}$$

$$C = \frac{4x - 14 + 5x + 15}{(x+3)(2x-7)}$$

$$C = \frac{\mathbf{9x + 1}}{\boldsymbol{(x+3)(2x-7)}}$$

$$D = \frac{2x-1}{x-5} - \frac{4x+1}{2x}$$

$$D = \frac{(2x-1) \times \boldsymbol{2x}}{(x-5) \times \boldsymbol{2x}} - \frac{(4x+1)(\boldsymbol{x-5})}{2x(\boldsymbol{x-5})}$$

$$D = \frac{4x^2 - 2x - (4x^2 - 20x + x - 5)}{2x(x-5)}$$

$$D = \frac{4x^2 - 2x - 4x^2 + 20x - x + 5}{2x(x-5)}$$

$$D = \frac{\mathbf{17x + 5}}{\boldsymbol{2x(x-5)}}$$

2. Identités remarquables

2a. Formules

Pour tous a et b réels :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Démonstration : Soient a et b réels.

$(a+b)^2$
$= (a+b)(a+b)$
$= a \times a + a \times b$
$\quad + b \times a + b \times b$
$= a^2 + ab + ba + b^2$
$= \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$

$(a-b)^2$
$= (a-b)(a-b)$
$= a \times a - a \times b$
$\quad - b \times a + b \times b$
$= a^2 - ab - ba + b^2$
$= \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$

$(a+b)(a-b)$
$= a \times a - a \times b$
$\quad + b \times a - b \times b$
$= a^2 - ab + ba - b^2$
$= \boldsymbol{a^2 - b^2}$

2b. Développer $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$

Maintenant, afin de développer une expression de la forme $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$, il faudra utiliser ces identités remarquables pour aller plus vite.

Exemple 1 Recopier et compléter :

a. $(4+x)^2 = ...^2 + 2 \times ... \times ... + ...^2$
$= ... + \quad ... \quad + ...$

b. $(5x-3)^2 = ...^2 - 2 \times ... \times ... + ...^2$
$= ... - \quad ... \quad + ...$

Exemple 2 Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (x+6)^2$ $\quad B = (5x+2)^2$ $\quad C = (4y-7)^2$ $\quad D = (0{,}7-2t)^2$

$E = (3x-7)^2 + (10x-1)^2$ $\quad F = 5(y-3) - (y+3)^2$

$G = 2(a-9)^2$ $\quad H = (x+1)(7-x)^2$

Exemple 1

a. *On identifie* $(4+x)^2$ *à la forme* $(a+b)^2$. *Le* a *de l'identité remarquable correspond au* 4, *et le* b *au* x.
On l'écrit sous la forme $a^2 + 2ab + b^2$.

$(4+x)^2 = \mathbf{4^2} + 2 \times \mathbf{4} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x^2}$
$= \mathbf{16} + \quad \mathbf{8}\boldsymbol{x} \quad + \boldsymbol{x^2}$

b. *Ici, la forme est* $(a-b)^2$. *Le* a *correspond au* 5x, *et le* b *au* 3.
Attention, dans la formule, ***c'est* 5x *en entier qui doit être au carré***. *On l'écrit donc entre parenthèses :* $(5x)^2$ *et on doit* ***élever le 5 et le x au carré***.

$(5x-3)^2 = \mathbf{(5}\boldsymbol{x}\mathbf{)^2} - 2 \times \mathbf{5}\boldsymbol{x} \times \mathbf{3} + \mathbf{3^2}$
$= \mathbf{25}\boldsymbol{x^2} - \quad \mathbf{30}\boldsymbol{x} \quad + \mathbf{9}$

Exemple 2

$A = (x+6)^2$
$A = x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2$
$A = \boldsymbol{x^2 + 12x + 36}$

$B = (5x+2)^2$
$B = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2$
$B = \boldsymbol{25x^2 + 20x + 4}$

$C = (4y-7)^2$
$C = (4y)^2 - 2 \times 4y \times 7 + 7^2$
$C = \boldsymbol{16y^2 - 56y + 49}$

$D = (0{,}7 - 2t)^2$
$D = 0{,}7^2 - 2 \times 0{,}7 \times 2t + (2t)^2$
$D = \boldsymbol{0{,}49 - 2{,}8t + 4t^2}$

Dans les développements suivants, nous allons développer chaque identité remarquable entre parenthèses, puis développer ou supprimer les parenthèses suivant la forme du calcul.

$E = (3x-7)^2 + (10x-1)^2$
$E = ((3x)^2 - 2 \times 3x \times 7 + 7^2) + ((10x)^2 - 2 \times 10x \times 1 + 1^2)$
$E = (9x^2 - 42x + 49) + (100x^2 - 20x + 1)$
La 2ème parenthèse est précédée d'un +, on la supprime sans changer les signes.
$E = 9x^2 - 42x + 49 + 100x^2 - 20x + 1$
$E = \boldsymbol{109x^2 - 62x + 50}$

Ici, le premier membre n'est pas une identité remarquable, c'est juste un développement simple.

$F = 5(y-3) - (y+3)^2$
$F = 5 \times y - 5 \times 3 - (y^2 + 2 \times y \times 3 + 3^2)$
La parenthèse est précédée d'un −, on la supprime en changeant les signes.
$F = 5y - 15 - (y^2 + 6y + 9)$
$F = 5y - 15 - y^2 - 6y - 9$
$F = \boldsymbol{-y^2 - y - 24}$

*Ici, **le carré étant prioritaire sur la multiplication par 2**, on développe d'abord avec l'identité remarquable en laissant le résultat entre parenthèses.*
On ne distribue la multiplication par 2 qu'après.

$G = 2(a-9)^2$
$G = 2(a^2 - 2 \times a \times 9 + 9^2)$
$G = 2(a^2 - 18a + 81)$
$G = 2 \times a^2 - 2 \times 18a + 2 \times 81$
$G = \boldsymbol{2a^2 - 36a + 162}$

Même règle ici, mais on termine par un développement double assez long.

$H = (x+1)(7-x)^2$
$H = (x+1)(7^2 - 2 \times x \times 7 + x^2)$
$H = (x+1)(49 - 14x + x^2)$
$H = x \times 49 - x \times 14x + x \times x^2 + 1 \times 49 - 1 \times 14x + 1 \times x^2$
$H = 49x - 14x^2 + x^3 + 49 - 14x + x^2$
$H = \boldsymbol{x^3 - 13x^2 - 35x + 49}$

2c. Développer $(a+b)(a-b)$

Exemples Développer et réduire.

$A=(x+3)(x-3)$ $B=(5-y)(5+y)$ $C=(3x+8)(3x-8)$ $D=(1-7t)(1+7t)$

$E=-(6-x)(6+x)$ $F=8(10-2x)(10+2x)$ $G=(x+1)^2-(5+4x)(5-4x)$

$H=\frac{6}{5}\left(2x-\frac{1}{3}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right)$

On fait attention à ne pas confondre a *et* b. *Ici,* $\mathrm{a}=\mathrm{x}$ *et* $\mathrm{b}=3$.

$A=(x+3)(x-3)$
$A=x^2-3^2$
$A=\boldsymbol{x^2-9}$

Pour cette formule, l'ordre des parenthèses $(\mathrm{a}+\mathrm{b})$ *et* $(\mathrm{a}-\mathrm{b})$ *n'a* ***pas d'importance***.

$B=(5-y)(5+y)$
$B=5^2-y^2$
$B=\boldsymbol{25-y^2}$

Comme pour les autres identités, on fait attention à bien mettre a *et* b ***entre parenthèses si nécessaire***.

$C=(3x+8)(3x-8)$
$C=(3x)^2-8^2$
$C=\boldsymbol{9x^2-64}$

$D=(1-7t)(1+7t)$
$D=1^2-(7t)^2$
$D=\boldsymbol{1-49t^2}$

Pour le E et le F, il est plus simple d'appliquer d'abord l'identité remarquable avant de distribuer le signe – ou le nombre en facteur. On pourrait aussi les distribuer dès le début à la première parenthèse (et donc ne pas utiliser l'identité).

$E=-(6-x)(6+x)$
$E=-(6^2-x^2)$
$E=-(36-x^2)$
$E=-36+x^2$
$E=\boldsymbol{x^2-36}$

$F=8(10-2x)(10+2x)$
$F=8(10^2-(2x)^2)$
$F=8(100-4x^2)$
$F=800-32x^2$
$F=\boldsymbol{-32x^2+800}$

$G=(x+1)^2-(5+4x)(5-4x)$
$G=(x^2+2\times x\times 1+1^2)-(5^2-(4x)^2)$
$G=(x^2+2x+1)-(25-16x^2)$
$G=x^2+2x+1-25+16x^2$
$G=\boldsymbol{17x^2+2x-24}$

$$H=\frac{6}{5}\left(2x-\frac{1}{3}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right)$$
$$H=\frac{6}{5}\left((2x)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$$
$$H=\frac{6}{5}\left(4x^2-\frac{1}{9}\right)$$
$$H=\frac{6}{5}\times 4x^2-\frac{6}{5}\times\frac{1}{9}$$
$$H=\boldsymbol{\frac{24}{5}x^2-\frac{2}{15}}$$

2d. Factorisation avec une identité

Exemple 1 Factoriser les expressions suivantes.

$A = x^2 + 18x + 81$ $\quad B = 36 - 12t + t^2$ $\quad C = 49x^2 - 42x + 9$

$D = x^2 - 16$ $\quad E = 100x^2 - 9$ $\quad F = 1 - 81z^2$

Exemple 2

a. Pour pouvoir factoriser l'expression $A = 16x^2 - \;\ldots\; + 25$ avec une identité remarquable, que doit-on avoir dans le terme en pointillés ? Factoriser alors A.

b. Factoriser $B = 81 + 16y^2 - 72y$ après avoir réordonné les termes.

c. Factoriser $C = 2x^2 + 20x + 50$; $D = 45x^2 - 80$ et $E = -x^2 + 16x - 64$.

Exemple 3 Factoriser ces expressions plus difficiles.

$A = x^2 - 17$ $\quad B = (t+3)^2 - 16$ $\quad C = \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$ $\quad D = x^2 + 2\sqrt{7}x + 7$

Le but est de reconnaître une expression de la forme $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$ ou encore $a^2 - b^2$. Pour cela, il faut ***identifier les deux carrés a^2 et b^2****, et vérifier que l'éventuel troisième terme est bien $2ab$.*

Exemple 1

On reconnaît x^2, et 81 qui est le carré de 9. De plus, $18x$ est bien égal à $2 \times x \times 9$.

$A = x^2 + 18x + 81$

$A = x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2$

$A = (\boldsymbol{x + 9})^2$

$B = 36 - 12t + t^2$

$B = 6^2 - 2 \times 6 \times t + t^2$

$B = (\boldsymbol{6 - t})^2$

$C = 49x^2 - 42x + 9$

$C = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 3 + 3^2$

$C = (\boldsymbol{7x - 3})^2$

$D = x^2 - 16$

$D = x^2 - 4^2$

$D = (\boldsymbol{x + 4})(\boldsymbol{x - 4})$

$E = 100x^2 - 9$

$E = (10x)^2 - 3^2$

$E = (\boldsymbol{10x + 3})(\boldsymbol{10x - 3})$

$F = 1 - 81z^2$

$F = 1^2 - (9z)^2$

$F = (\boldsymbol{1 + 9z})(\boldsymbol{1 - 9z})$

Exemple 2

a. On a $16x^2 = (4x)^2$ et $25 = 5^2$.

Donc en posant $a = 4x$ et $b = 5$, le terme en pointillés doit être :

$$2ab = 2 \times 4x \times 5 = \boldsymbol{40x}$$

Ainsi, $A = 16x^2 - 40x + 25 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + 5^2 = (\boldsymbol{4x - 5})^{\boldsymbol{2}}$

b. Les termes ne sont en effet pas dans le bon ordre,

mais on reconnaît $81 = 9^2$ et $16y^2 = (4y)^2$ et on a bien $-72y = -2 \times 9 \times 4y$.

On réécrit :

$B = 81 + 16y^2 - 72y = 81 - 72y + 16y^2 = 9^2 - 2 \times 9 \times 4y + (4y)^2 = (\boldsymbol{9 - 4y})^{\boldsymbol{2}}$

c. *Ces trois expressions ne se factorisent pas immédiatement avec une identité remarquable, mais elles comportent toutes un facteur commun. On peut donc* ***d'abord faire une factorisation simple****.*

$C = 2x^2 + 20x + 50$
$C = 2(x^2 + 10x + 25)$
$C = 2(x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2)$
$C = \mathbf{2}(\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^2$

$D = 45x^2 - 80$
$D = 5(9x^2 - 16)$
$D = 5((3x)^2 - 4^2)$
$D = \mathbf{5}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{4})(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{4})$

$E = -x^2 + 16x - 64$
$E = -(x^2 - 16x + 64)$
$E = -(x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2)$
$E = -(\boldsymbol{x} - \mathbf{8})^2$

Exemple 3

$A = x^2 - 17$ *17 est le carré de… $\sqrt{17}$.*
$A = x^2 - \sqrt{17}^2$
$A = \left(\boldsymbol{x} + \sqrt{\mathbf{17}}\right)\left(\boldsymbol{x} - \sqrt{\mathbf{17}}\right)$

$B = (t+3)^2 - 16$ *On a envie de développer, mais on nous demande de factoriser.*
$B = (t+3)^2 - 4^2$
$B = \big((t+3)+4\big)\big((t+3)-4\big)$
$B = (\boldsymbol{t} + \mathbf{7})(\boldsymbol{t} - \mathbf{1})$

$C = \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$
$C = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 2 \times \frac{2}{3}x \times 1 + 1^2$
$C = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}$

$D = x^2 + 2\sqrt{7}x + 7$
$D = x^2 + 2 \times x \times \sqrt{7} + \sqrt{7}^2$
$D = \left(\boldsymbol{x} + \sqrt{\mathbf{7}}\right)^{\mathbf{2}}$

3. Équations produit nul

3a. Résoudre une équation

Propriété : Un produit est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

Définition : Une équation produit nul est une équation dont le premier membre est un produit, l'autre membre est zéro.

Exemple Résoudre les équations suivantes.

a. $(x+1)(x-8)=0$ **b.** $(5x-3)(6+x)=0$ **c.** $(11-8x)(3x+7)=0$

d. $(5x+4)+(-x+9)=0$ **e.** $(7-x)(x-7)=0$ f. $2x(3x+2)(3x-1)=0$

a. *Il s'agit d'une équation produit nul.*

• Soit $x+1=0 \Leftrightarrow x=\mathbf{-1}$ • Soit $x-8=0 \Leftrightarrow x=\mathbf{8}$

Ainsi : $S=\{\mathbf{-1}\,;\mathbf{8}\}$

b. *Il s'agit d'une équation produit nul.*

• Soit $5x-3=0 \Leftrightarrow 5x=3 \Leftrightarrow x=\mathbf{\frac{3}{5}}$ • Soit $6+x=0 \Leftrightarrow x=\mathbf{-6}$

Ainsi : $S=\left\{\mathbf{\frac{3}{5}}\,;\mathbf{-6}\right\}$

c. *Il s'agit d'une équation produit nul.*

• Soit $11-8x=0 \Leftrightarrow -8x=-11 \Leftrightarrow x=\frac{-11}{-8}=\mathbf{\frac{11}{8}}$

• Soit $3x+7=0 \Leftrightarrow 3x=-7 \Leftrightarrow x=-\mathbf{\frac{7}{3}}$

Ainsi : $S=\left\{\mathbf{\frac{11}{8}}\,;-\mathbf{\frac{7}{3}}\right\}$

d. *Ce n'est pas une équation produit nul : le membre de gauche n'est pas un produit.*

$(5x+4)+(-x+9)=0$

$\Leftrightarrow 5x+4-x+9=0$

$\Leftrightarrow 4x+13=0$

$\Leftrightarrow 4x=-13$

$\Leftrightarrow x=-\frac{13}{4}$ et $S=\left\{-\mathbf{\frac{13}{4}}\right\}$

e. *C'est une équation produit nul, mais les deux facteurs donnent la même solution.*

• Soit $7-x=0 \Leftrightarrow -x=-7 \Leftrightarrow x=\mathbf{7}$ • Soit $x-7=0 \Leftrightarrow x=\mathbf{7}$. Ainsi : $S=\{7\}$

f. *Il s'agit d'une équation produit nul, mais à trois facteurs cette fois.*

• Soit $2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{0}{2} \Leftrightarrow x=\mathbf{0}$

• Soit $3x+2=0 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\mathbf{\frac{2}{3}}$

• Soit $3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\mathbf{\frac{1}{3}}$

Ainsi : $S=\left\{\mathbf{0}\,;-\mathbf{\frac{2}{3}}\,;\mathbf{\frac{1}{3}}\right\}$

3b. Factoriser puis résoudre

Exemple Résoudre les équations suivantes.

a. $5x^2 - 6x = 0$ **b.** $(2x+1)(x+4) + (x+4)(3-5x) = 0$ **c.** $x^2 + 6x + 9 = 0$

d. $(4x-7)(9x+5) = (8x-3)(4x-7)$ **e.** $3x^2 + 75 = 30x$

a. $5x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(5x-6) = 0$. *Il s'agit maintenant d'une équation produit nul.*

• Soit $x = \mathbf{0}$ • Soit $5x - 6 = 0 \Leftrightarrow 5x = 6 \Leftrightarrow x = \mathbf{\frac{6}{5}}$ Ainsi $S = \left\{\mathbf{0}\,;\mathbf{\frac{6}{5}}\right\}$.

b. $(2x+1)(\boldsymbol{x+4}) + (\boldsymbol{x+4})(3-5x) = 0$ *On factorise par $(x+4)$.*
$\Leftrightarrow (x+4)\big((2x+1)+(3-5x)\big) = 0$ *La parenthèse est précédée d'un signe +.*
$\Leftrightarrow (x+4)(-3x+4) = 0$ *On a trouvé une équation produit nul.*

• Soit $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{-4}$ • Soit $-3x + 4 = 0 \Leftrightarrow -3x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$

Ainsi $S = \left\{\mathbf{-4}\,;\mathbf{\frac{4}{3}}\right\}$.

c. $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0$.
Il s'agit d'une équation produit nul, mais avec un facteur multiplié par lui-même.
$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ et $S = \{\mathbf{-3}\}$.

d. $(4x-7)(9x+5) = (8x-3)(4x-7)$
$\Leftrightarrow (\mathbf{4x-7})(9x+5) - (8x-3)(\mathbf{4x-7}) = 0$
$\Leftrightarrow (4x-7)\big((9x+5)-(8x-3)\big) = 0$
$\Leftrightarrow (4x-7)(x+8) = 0$

• Soit $4x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4x = 7 \Leftrightarrow x = \mathbf{\frac{7}{4}}$ • Soit $x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{-8}$

Ainsi : $S = \left\{\mathbf{\frac{7}{4}}\,;\mathbf{-8}\right\}$

e. $3x^2 + 75 = 30x$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 75 - 30x = 0$ *On fait passer tout dans le même de gauche.*
$\Leftrightarrow 3x^2 - 30x + 75 = 0$
On essaye maintenant de factoriser pour avoir une équation produit nul.
$\Leftrightarrow 3(x^2 - 10x + 25) = 0$
$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2) = 0$
$\Leftrightarrow 3(x-5)^2 = 0$
Il s'agit d'une équation produit nul, mais avec un facteur multiplié par lui-même.
$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ et $S = \{\mathbf{5}\}$.

4. Autres propriétés

4a. Équations quotient

Propriété : Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.

Exemple Résoudre les équations quotient.

$$\text{a. } \frac{5x-4}{x-2}=0 \qquad \text{b. } \frac{(4-x)(3+5x)}{x+7}=0 \qquad \text{c. } \frac{x-10}{2x+6}=4$$

a. La valeur interdite vérifie $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. **La valeur interdite est donc 2**.

Le quotient est nul si et seulement si $5x-4=0 \Leftrightarrow 5x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$

$S=\left\{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right\}$.

b. La valeur interdite vérifie $x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$. **La valeur interdite est -7**.
Le quotient est nul si et seulement si $(4-x)(3+5x)=0$
Il s'agit d'une équation produit nul.

• Soit $4-x=0 \Leftrightarrow -x=-4 \Leftrightarrow x=\mathbf{4}$

• Soit $3+5x=0 \Leftrightarrow 5x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$

$S=\left\{\mathbf{4}\,;-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right\}$

c. *Ce n'est pas encore une équation quotient, car le membre de droite n'est pas 0. On peut déjà trouver la valeur interdite, mais il faudra ensuite faire passer le 4 à gauche et tout mettre sur le même dénominateur.*

$2x+6=0 \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow x=\frac{-6}{2}=-3$. **La valeur interdite est donc -3.**

$$\frac{x-10}{2x+6}=4$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-10}{2x+6}-4=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-10}{2x+6}-\frac{4(\mathbf{2x+6})}{\mathbf{2x+6}}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-10-8x-24}{2x+6}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-7x-34}{2x+6}=0$$

Il s'agit maintenant d'une équation quotient.

Le quotient est nul si et seulement si $-7x-34=0 \Leftrightarrow -7x=34 \Leftrightarrow x=-\frac{34}{7}$

$S=\left\{-\frac{\mathbf{34}}{\mathbf{7}}\right\}$.

4b. Tableaux de signes

Exemple 1 Dresser le tableau de signes de ces expressions. *Il s'agit d'un rappel d'un chapitre précédent.*

a. $A(x) = -5x + 2$ **b.** $B(x) = (x-1)(6-4x)$ **c.** $C(x) = \frac{-3x+7}{5x+2}$

Exemple 2 Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes après avoir factorisé.

a. $A(x) = 25x^2 - 9$ **b.** $B(x) = 4x(x-7) - (x-7)^2$

Exemple 3 Résoudre les inéquations : **a.** $-2x(7x+1) < 0$ **b.** $\frac{5x+1,5}{-2x-7} \geq 0$ **c.** $\frac{5}{x-2} \geq 1$

Exemple 4 Dresser les tableaux de signes d'expressions plus difficiles.

a. $A(x) = 1 - \frac{5}{x}$ **b.** $B(x) = -5x^3 + 40x^2 - 80x$ **c.** $C(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$

Exemple 1

a. *La première expression est celle d'une fonction affine.*
Nous avons vu deux méthodes pour dresser leur tableau de signes : l'une avec une équation, l'autre avec une formule $-\frac{p}{m}$ sur le coefficient directeur m et sur l'ordonnée à l'origine p pour trouver la valeur qui annule l'expression. Pour ces exemples, je ne vais suivre que la méthode avec l'équation.

$A(x) = -5x + 2$. On résout l'inéquation :

$-5x + 2 \geq 0$
$\Leftrightarrow -5x \geq -2$
$\Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{-5}$
$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{0,4}$

x	$-\infty$		$0,4$		$+\infty$
$-5x+2$		$+$	0	$-$	

On trouve que $A(x)$ est positif pour x inférieur ou égal à 0,4. Dans le tableau, on écrit donc « + » dans la partie à gauche de 0,4, et « − » à droite de 0,4.

b. $B(x) = (x-1)(6-4x)$

$x - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{1}$

$6 - 4x \geq 0$
$\Leftrightarrow -4x \geq -6$
$\Leftrightarrow x \leq \frac{-6}{-4}$
$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{1,5}$

*• Dans $(x-1)$, $m = 1$ est **positif**.*
*On place donc des « + » **à droite** de 1.*
*• Dans $(6-4x)$, $m = -4$ est **négatif**.*
*On place donc des « + » **à gauche** de 1,5.*

x	$-\infty$		1		$1,5$		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$6-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. $C(x) = \dfrac{-3x+7}{5x+2}$

$-3x + 7 \geq 0$
$\Leftrightarrow -3x \geq -7$
$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{-7}{-3}$
$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{\dfrac{7}{3}}$

$5 + 2x \geq 0$
$\Leftrightarrow 2x \geq -5$
$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{-5}{2}$
$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{-2,5}$

• *Dans* $(-3x+7)$, *$m = -3$ est **négatif**.*
*On place donc des « + » **à gauche** de* $\dfrac{7}{3}$.
• *Dans* $(5x+2)$, *$m = 5$ est **positif**.*
*On place donc des « + » **à droite** de −2,5.*

x	$-\infty$		$-2,5$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$-3x+7$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$5+2x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$C(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Exemple 2

On ne peut dresser le tableau de signes que d'une expression factorisée. Il faut donc factoriser ces deux expressions avant de pouvoir dresser le tableau.

a. $A(x) = 25x^2 - 9$ est une identité remarquable.
$A(x) = (5x)^2 - 3^2 = (\mathbf{5x+3})(\mathbf{5x-3})$

$5x + 3 \geq 0$
$\Leftrightarrow 5x \geq -3$
$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{-3}{5}$
$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{-0,6}$

$5x - 3 \geq 0$
$\Leftrightarrow 5x \geq 3$
$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{5}$
$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{0,6}$

x	$-\infty$		$-0,6$		$0,6$		$+\infty$
$5x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$5x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. $B(x) = 4(x-7) - (x-7)^2$ se factorise par $(x-7)$.
$B(x) = (x-7)\big(4-(x-7)\big) = (x-7)(4-x+7) = (\boldsymbol{x-7})(\boldsymbol{-x+11})$

$x - 7 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{7}$

$-x + 11 \geq 0$
$\Leftrightarrow -x \geq -11$
$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{11}$

x	$-\infty$		7		11		$+\infty$
$x-7$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-x+11$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple 3 *On ne sait résoudre les inéquations qu'avec des expressions affines ou des expressions comportant uniquement x^2. Mais ces inéquations reviennent en fait à chercher pour quelle valeur de x une expression est positive/négative, ce qui peut se trouver à l'aide de tableaux de signes.*

a. $-2x(7x+1) < 0$. *Cela signifie que l'expression doit être **strictement négative**.*

$-2x \geq 0$
$\Leftrightarrow x \leq \frac{0}{-2}$
$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{0}$

$7x + 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow 7x \geq -1$
$\Leftrightarrow x \geq -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$7x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x(7x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

*On lit dans le tableau de signes l'ensemble des x où l'expression est **strictement négative**.*

$S =]-\infty; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}[\cup]\mathbf{0}; +\infty[$

b. $\frac{5x + 1{,}5}{-2x - 7} \geq 0$

$5x + 1{,}5 \geq 0$
$\Leftrightarrow 5x \geq -1{,}5$
$\Leftrightarrow x \geq \frac{-1{,}5}{5}$
$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{-0,3}$

$-2x - 7 \geq 0$
$\Leftrightarrow -2x \geq 7$
$\Leftrightarrow x \leq \frac{7}{-2}$
$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{-3,5}$

x	$-\infty$		$-3,5$		$-0,3$		$+\infty$
$5x+1,5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x-7$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{5x+1,5}{-2x-7}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

*On lit dans le tableau de signes l'ensemble des x où l'expression est **positive ou nulle** (en excluant la valeur interdite).*

$S =]-\mathbf{3,5}; \mathbf{-0,3}]$

c. *Il faut modifier cette équation pour avoir un 0 dans le membre de droite, et ainsi pouvoir la résoudre avec un tableau de signes.*

$$\frac{5}{x-2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x-2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{x-2} - \frac{1(x-2)}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-x+2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{7-x}{x-2} \geq 0}$$

$7 - x \geq 0$
$\Leftrightarrow -x \geq -7$
$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{7}$

$x - 2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{2}$

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$7-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{7-x}{x-2}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

*On lit dans le tableau de signes l'ensemble des x où l'expression est **positive ou nulle** (en excluant la valeur interdite).*

$S =]\mathbf{2}; \mathbf{7}]$

Exemple 4 *À nouveau, on ne peut dresser le tableau de signes que des expressions factorisées. Il faut donc écrire ces expressions comme des produits ou des quotients (avec une seule fraction).*

a. $A(x) = 1 - \frac{5}{x} = \frac{x}{x} - \frac{5}{x} = \boldsymbol{\frac{x-5}{x}}$

$x - 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{5}$

$x \geq \mathbf{0}$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$A(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

b. $B(x) = -5x^3 + 40x^2 - 80x = -5x(x^2 - 8x + 16) = \boldsymbol{-5x(x-4)^2}$

$(x-4)^2$ *étant un* ***carré****, il est* ***toujours positif****. Mais il peut s'annuler.*

$-5x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{0}{-5}$

$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{0}$

$x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \mathbf{4}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-4)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

c. $C(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2} = \boldsymbol{\frac{2x-3}{x^2}}$

x^2 *étant un* ***carré****, il est* ***toujours positif****. Mais il peut s'annuler, ce qui correspond à la* ***valeur interdite****.*

$2x - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq 3$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{1,5}$

$x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \mathbf{0}$

x	$-\infty$		0		$1,5$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$C(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	