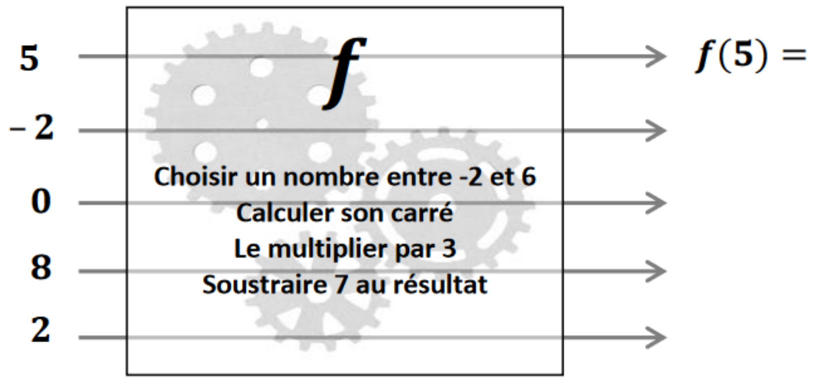
Chapitre 5 – Fonctions : définitions et représentation

1. Notion de fonction

1a. Ensemble de définition

Soit D un ensemble de nombres (par exemple, un intervalle).
Une fonction f définie sur D est un objet mathématique, qui à tout nombre $x \in D$, associe un unique autre nombre réel, noté $f(x)$. D est appelé l'ensemble de définition de f.

Exemple 1 Soit la fonction f définie sur $[-2\,;6]$ par $f(x) = 3x^2 - 7$ (on note aussi « $\boldsymbol{f : x \longmapsto 3x^2 - 7}$ »)



Exemple 2 Soit la fonction g définie sur $[-10; 10]$ par $g: x \longmapsto (x-3)(-2x+1)$

a. Calculer $g(4)$, $g(0)$ et $g(-2)$.

b. Dresser le tableau de signes de la fonction. Pour quelles valeurs de x a-t-on $g(x) = 0$?

Exemple 3 Une station de nettoyage de voiture demande aux automobilistes de payer 2,50€ pour commencer le lavage, puis 1,80€ par minute de nettoyage.

a. Exprimer le prix payé par un utilisateur en fonction de x, le temps de nettoyage.
Préciser l'ensemble de définition.

b. Utiliser cette fonction pour calculer le prix payé pour 6 minutes de nettoyage.

Exemple 4 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{9}{x-7}$

a. Quel est l'ensemble de définition de f ? **b.** Calculer $f(5)$.

Exemple 1

$f(5) = 3 \times 5^2 - 7 = 3 \times 25 - 7 = 75 - 7 = \mathbf{68}$

$f(-2) = 3 \times (-2)^2 - 7 = 3 \times 4 - 7 = 12 - 7 = \mathbf{5}$

$f(0) = 3 \times 0^2 - 7 = 3 \times 0 - 7 = 0 - 7 = \mathbf{-7}$

$\boldsymbol{f(8)}$ **n'existe pas**, car l'ensemble de définition est $[-2; 6]$, qui exclut 8.

$f(2) = 3 \times 2^2 - 7 = 3 \times 4 - 7 = 12 - 7 = \mathbf{5}$

Notez qu'on retrouve le même résultat que pour f(-2).

Exemple 2

a. $g(4) = (4-3)(-2\times 4+1) = (-1)\times(-8+1) = (-1)\times(-7) = \mathbf{7}$

$g(0) = (0-3)(-2\times 0+1) = (-3)\times(0+1) = (-3)\times 1 = \mathbf{-3}$

$g(-2) = (-2-3)(-2\times(-2)+1) = (-5)\times 5 = \mathbf{25}$

b. $g(x) = (x-3)(-2x+1)$

On résout les deux inéquations pour trouver les valeurs qui annulent g(x)*.*

$x - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{3}$

$-2x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow -2x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{-1}{-2}$

$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{0,5}$

• *Dans* $(x-3)$, $m = 1$ *est* ***positif****. On place donc des « + »* ***à droite*** *de* 3*.*

• *Dans* $(-2x+1)$, $m = -2$ *est* ***négatif****. On place donc des « + »* ***à gauche*** *de* 0,5*.*

x	$-\infty$		$0,5$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les valeurs de x pour lesquelles on a g(x) = 0 sont donc **3** et **0,5**.

Exemple 3

a. On paye de toute façon 2,50€, puis 1,80€ pour chacune des x minutes de nettoyages. Donc le prix payé en fonction de x est $\mathbf{f(x) = 2,50 + 1,80x}$.

Ici, x représente une durée, qui ne peut pas être négative.

Donc **f est définie sur** $[\mathbf{0}; +\infty[$.

b. Il s'agit juste de calculer f(6) = 2,50 + 1,80 × 6 = 2,50 + 10,80 = **13,30€**.

Exemple 4

a. On ne peut pas diviser par zéro, or $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{7}$.

La **valeur interdite** est donc 7. f est définie pour tous les nombres réels, sauf 7. Son ensemble de définition est $]-\infty; \mathbf{7}[\cup]\mathbf{7}; +\infty[$ qui s'écrit plus simplement $\mathbb{R}\backslash\{\mathbf{7}\}$

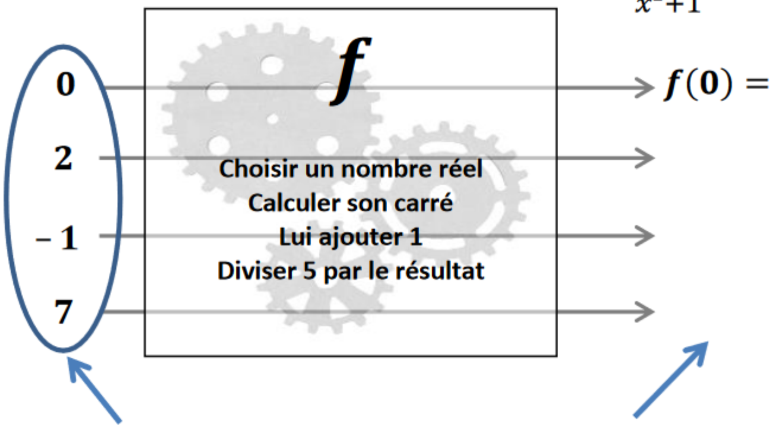
b. $f(5) = \dfrac{9}{5-7} = \dfrac{9}{-2} = \mathbf{-4,5}$

1b. Image et antécédent

Pour $a \in D$, si $f(a) = b$, on dit que
- b est l'image de a par f
- a est un antécédent de b par f.

Remarque : un nombre ne peut avoir qu'une image par f.
En revanche, un nombre peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.
Pour déterminer les antécédents d'un nombre b par f, il faut résoudre l'équation $f(x) = b$.

Exemple 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \frac{5}{x^2+1}$



Exemple 2 Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 2x + 7$

a. Calculer l'image de 4 par g.

b. Déterminer l'antécédent de 17 par g.

c. Calculer $g(7)$ et $g(\frac{11}{4})$.

d. Résoudre l'équation $g(x) = 33$.

Exemple 3 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 6$

a. Calculer l'image de 9 par h, puis calculer $h(-3)$ et $h(\sqrt{13})$.

b. Déterminer les antécédents de 31 par h.

c. Déterminer les antécédents de 5 par h.

Exemple 1 Les nombres indiqués par la flèche de gauche sont donc les « antécédents », et les nombres à droite sont les « images ».

$$f(0) = \frac{5}{0^2 + 1} = \frac{5}{1} = \mathbf{5}$$

$$f(2) = \frac{5}{2^2 + 1} = \frac{5}{5} = \mathbf{1}$$

$$f(-1) = \frac{5}{(-1)^2 + 1} = \frac{5}{2} = \mathbf{2,5}$$

$$f(-1) = \frac{5}{7^2 + 1} = \frac{5}{50} = \mathbf{0,1}$$

Exemple 2

a. Calculer l'image de 4 par g, c'est calculer $g(4) = 2 \times 4 + 7 = 8 + 7 = \mathbf{15}$

b. Déterminer l'antécédent de 17 par g, c'est résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} & g(x) = 17 \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 7 = 17 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 17 - 7 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 10 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{10}{2} = \mathbf{5} \end{aligned}$$

L'antécédent de 17 par g est donc 5, ce qui signifie que $g(5) = 17$.

c. *La consigne aurait pu être « calculer les images de 7 et de $\frac{11}{4}$ par g ».*

$g(7) = 2 \times 7 + 7 = 14 + 7 = \mathbf{21}$

$g\left(\frac{11}{4}\right) = 2 \times \frac{11}{4} + 7 = \frac{22}{4} + 7 = 5{,}5 + 7 = \mathbf{12{,}5}$

d. *La consigne aurait pu être « déterminer l'antécédent de 33 par g ».*

$$\begin{aligned} & g(x) = 33 \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 7 = 33 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 33 - 7 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 26 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{26}{2} = \mathbf{13} \end{aligned}$$

Exemple 3

a. $h(9) = 9^2 + 6 = 81 + 6 = \mathbf{85}$

$h(-3) = (-3)^2 + 6 = 9 + 6 = \mathbf{15}$

$h(\sqrt{13}) = (\sqrt{13})^2 + 6 = 13 + 6 = \mathbf{19}$

b. *Comme vu dans l'exemple 2, quand on demande de trouver des antécédents, il faut résoudre une équation.*

$$\begin{aligned} & h(x) = 31 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 6 = 31 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 31 - 6 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 25 \\ & S = \{-5; 5\} \end{aligned}$$

Les antécédents de 31 par h sont donc $\mathbf{-5}$ **et 5**.

c.

$$\begin{aligned} & h(x) = 5 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 6 = 5 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 5 - 6 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = -1 \end{aligned}$$

$S = \emptyset$ car un carré ne peut pas être négatif.

5 n'a donc **pas d'antécédents** par h.

1c. Tableaux de valeurs

Exemple 1 Compléter les tableaux de valeurs des fonctions f, g et h.

$f(x) = 8x + 9$ définie sur $\mathbb{R}$ $\qquad g : x \longmapsto 4 + \frac{8}{x}$ définie pour tout réel x non nul $\qquad h(x) = x^2 - 6x$ définie sur $\mathbb{R}$

x	2	0	1,5	
$f(x)$				-3

x	2	-1	0
$g(x)$			

x	10	- 6	$\sqrt{7}$
$h(x)$			

Exemple 2 Voici le tableau de valeurs d'une fonction f :

x	-6	-5	1	3	4
$f(x)$	10	3	3	19	30

Quelle est l'image de 4 ? Quelle est l'image de 1 ?

Quel est l'antécédent de 19 ? Quels sont les antécédents de 3 ?

La fonction f est déterminée par l'une de ces 4 expressions. Laquelle ?

$f(x) = -2x - 2 \qquad f(x) = x + 16 \qquad f(x) = (x+2)^2 - 6 \qquad f(x) = x + 2$

Exemple 1

• *Il faut calculer les* ***images*** *de 2, 0 et 1,5 par f, mais* ***l'antécédent*** *de -3.*

$f(2) = 8 \times 2 + 9 = 16 + 9 = \mathbf{25}$

$f(0) = 8 \times 0 + 9 = 0 + 9 = \mathbf{9}$

$f(1{,}5) = 8 \times 1{,}5 + 9 = 12 + 9 = \mathbf{21}$

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow 8x + 9 = -3 \Leftrightarrow 8x = -9 - 3 \Leftrightarrow 8x = -12 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{8} = \mathbf{-1{,}5}$$

• $g(2) = 4 + \frac{8}{2} = 4 + 4 = \mathbf{8}$

$g(-1) = 4 + \frac{8}{-1} = 4 - 8 = \mathbf{-4}$

En revanche, **on ne peut pas calculer $\boldsymbol{g(0)}$** car g n'est pas définie en 0.

• $h(10) = 10^2 - 6 \times 10 = 100 - 60 = \mathbf{40}$

$h(-6) = (-6)^2 - 6 \times (-6) = 36 + 36 = \mathbf{72}$

$h(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 - 6 \times \sqrt{7} = \mathbf{7 - 6\sqrt{7}}$ *et on ne peut pas l'écrire plus simplement.*

Exemple 2

• L'image de 4 est **30**

• L'image de 1 est **3**

• L'antécédent de 19 est **3**

• Les antécédents de 3 sont **-5 et 1** *On a d'ailleurs trouvé que l'image de 1 est 3.*

• La seule fonction qui convient pour le tableau est $\boldsymbol{f(x) = (x+2)^2 - 6}$

On peut vérifier que l'image de tous les antécédents par cette fonction donne le résultat voulu : $f(-6) = -10$ *;* $f(-5) = 3$*, etc.*

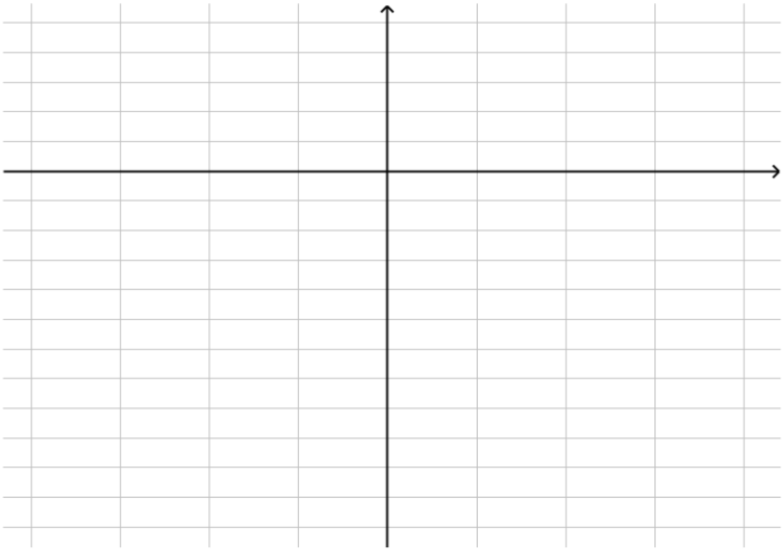
2. Représentation graphique

2a. Tracer une courbe

Dans un repère du plan, on appelle courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points $(x; y)$ tels que $x \in D$ et $y = f(x)$

Remarque : pour chaque point de la courbe $\mathcal{C}_f$, **l'image de l'abscisse est l'ordonnée**.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $[-4; 4]$ par $f(x) = 5 - x^2$. Représentons la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère.



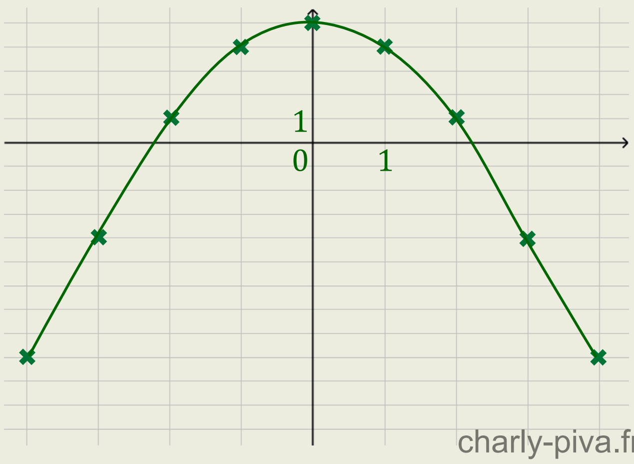
Pour représenter la courbe d'une fonction, on commence d'abord par calculer quelques images. Chaque image calculée permet de placer un point de la courbe, et on reliera ensuite les points de la courbe à main levée.
La fonction étant définie sur $[-4; 4]$, au vu du repère donné, nous allons calculer les images de tous les nombres entiers compris entre -4 et 4. Nous pouvons présenter les résultats dans un tableau.

Calculons : $f(-4) = 5 - (-4)^2 = 5 - 16 = -9$
$f(-3) = 5 - (-3)^2 = 5 - 9 = -4$
$f(-2) = 5 - (-2)^2 = 5 - 4 = 1$
... etc. Nous calculons d'autres images afin d'obtenir ce tableau :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-9	-4	1	4	5	4	1	-4	-9

Ensuite, pour chaque image trouvée, on place un point de la courbe.
Par exemple : $f(-4) = -9$, donc on place le point de coordonnées $(-4; -9)$.
De même, on place les points de coordonnées $(-3; -4)$, $(-2; 1)$, $(-1; 4)$, etc.

On peut ensuite relier les points à main levée.



Représenter les fonctions décrites ci-dessous après avoir rempli le tableau de valeurs.

Fonction **affine** : $f(x) = 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$ Fonction **carré** : $g : x \longmapsto x^2$ sur $[-2\,;3]$ Fonction **inverse** : $h(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

x	-2	-1	0	3	5
f(x)					

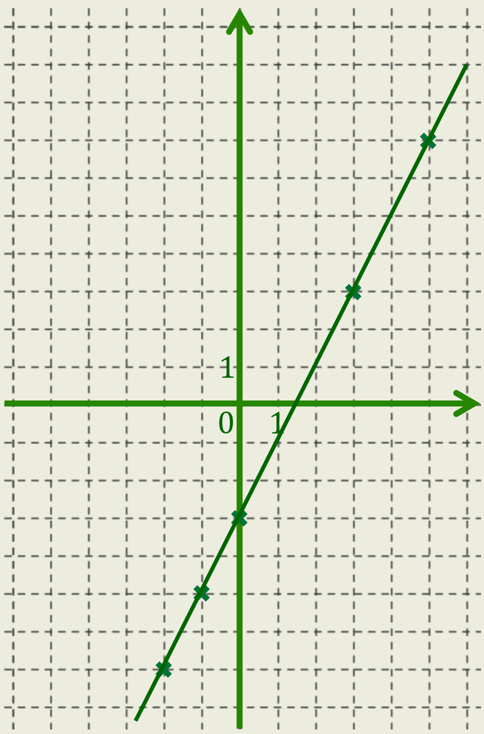
x	-2	-1	0	0,5	1	2	3
g(x)							

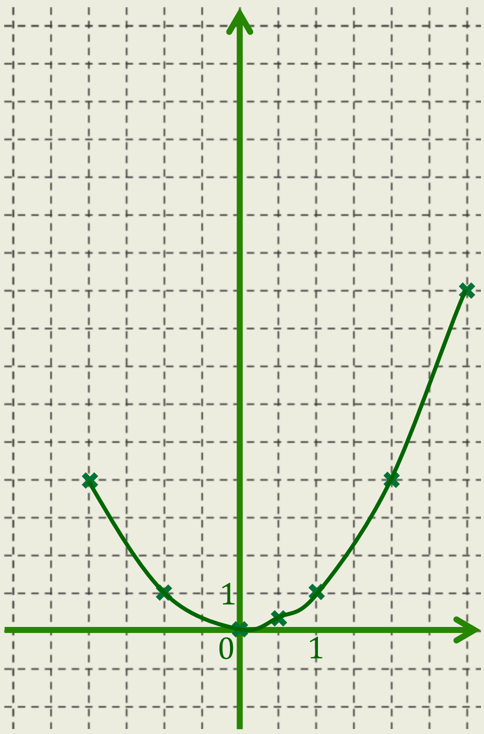
x	0,25	0,5	1	1,5	2
h(x)					

x	-2	-1	0	3	5
$f(x)$	**-7**	**-5**	**-3**	**3**	**7**

x	-2	-1	0	0,5	1	2	3
$g(x)$	**4**	**1**	**0**	**0,25**	**1**	**4**	**9**

x	0,25	0,5	1	1,5	2
$h(x)$	**4**	**2**	**1**	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	**0,5**



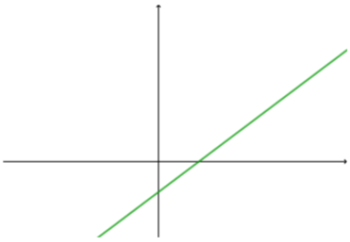


Dans chaque cas, on essaye de choisir un repère adapté à la fonction que l'on trace. Par exemple, pour la fonction carré, les images sont toutes positives, donc on n'a pas besoin de la partie « basse » du repère.

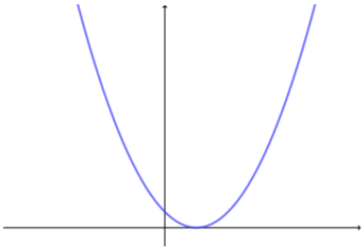
Exemple : <u>s’entraîner à tracer une courbe représentative à la calculatrice</u>.

Tracer une courbe représentative de chaque fonction à la calculatrice dans la fenêtre donnée.
Vous devez obtenir l’image en-dessous.

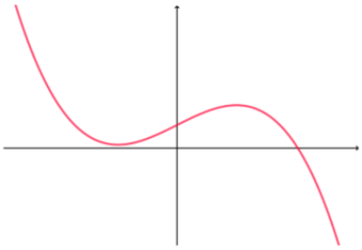
a. $f : x \mapsto 1{,}5x - 2$
$x \in [-6; 6]$ et $y \in [-5; 10]$



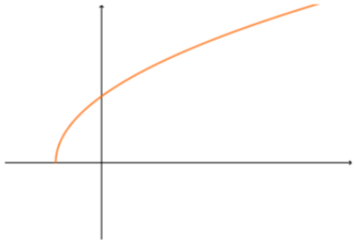
b. $g : x \mapsto (x-1)^2$
$x \in [-6; 6]$ et $y \in [-1; 14]$



c. $h : x \mapsto \dfrac{x+1}{2} - 0{,}1x^3$
$x \in [-4; 4]$ et $y \in [-2; 3]$



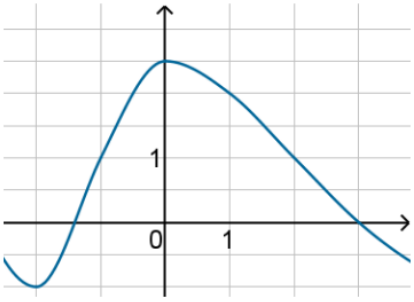
d. $j : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$
$x \in [-6; 16]$ et $y \in [-1; 2]$



2b. Lire une image ou un antécédent

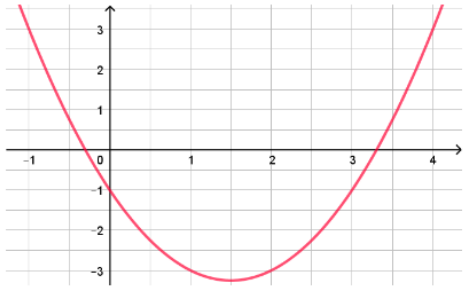
- Pour lire l'image d'un nombre x, on se positionne au niveau de x sur l'axe des abscisses.
- Pour lire les antécédents d'un nombre y, on se positionne au niveau de y sur l'axe des ordonnées.
- Un point $(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$.

Exemple 1 On donne la courbe représentative d'une fonction f. Compléter le tableau de valeurs.



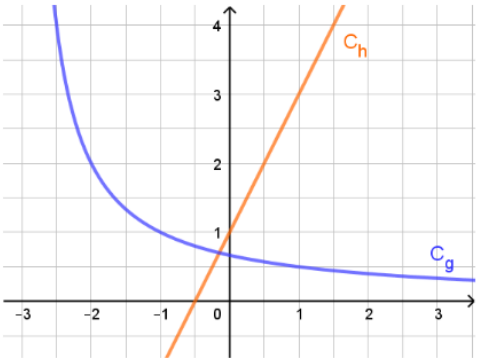
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

Exemple 2 Voici la courbe représentative d'une fonction f.



a. Lire $f(2)$. **b.** Lire l'image de 3 par f.
c. Lire $f(0)$. **d.** Lire les antécédents de 3 par f.

Exemple 3 On a tracé ci-contre les courbes des fonctions $g(x) = \frac{2}{x+3}$ et $h(x) = 2x + 1$ sur $]-3\,;4]$



a. Lire $g(1)$ et $h(1)$.
b. Donner l'antécédent de 2 par g, et par h.
c. Le point $M(3; 7)$ appartient-t-il à $\mathcal{C}_h$? Justifier.

Exemple 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 5$
a. Le point $A(2; 10)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifier.
b. Quelle est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse - 7 ?
c. Y-a-t-il des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 26 ? Si oui, quelles en sont les abscisses ?

Exemple 1 *On se place en face de chaque nombre x sur l'axe des* ***abscisses****.*

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2,5}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

Exemple 2 a. $f(2) = \mathbf{-3}$ **b.** L'image de 3 par f est $f(3) = \mathbf{-1}$ **c.** $f(0) = \mathbf{-1}$
d. *Contrairement aux cas précédents, pour lire les antécédents de 3, on se place sur le 3 de l'axe des ordonnées.*
Les antécédents de 3 sont $\mathbf{-1}$ **et 4**. *Autrement dit,* $\mathrm{f}(-1) = 3$ *et* $\mathrm{f}(4) = 3$ *aussi.*

Exemple 3 **a.** $g(1) = \mathbf{0,5}$ et $h(1) = \mathbf{3}$.
b. L'antécédent de 2 par g est $\mathbf{-2}$. L'antécédent de 2 par h est $\mathbf{0,5}$.
c. *La courbe ne permet pas de répondre, mais on connaît l'expression de* h. *La question revient donc à vérifier que* $\mathbf{h(3) = 7}$. $h(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$, donc $\boldsymbol{M \in \mathcal{C}_h}$.

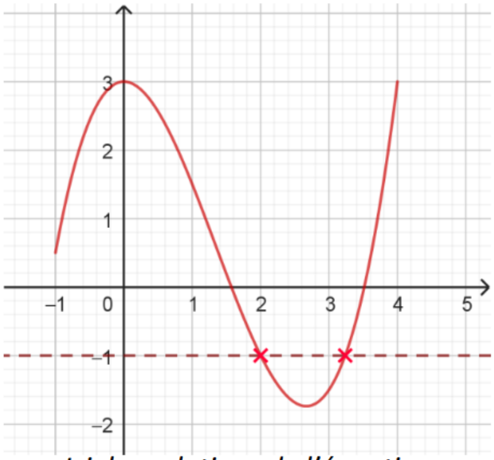
Exemple 4 **a.** $f(2) = 3 \times 2 + 5 = 11 \neq 10$ donc $\boldsymbol{A(2; 10) \notin \mathcal{C}_f}$.
b. On calcule $f(-7) = 3 \times (-7) + 5 = -21$ donc l'ordonnée du point est $\mathbf{-21}$.
c. $f(x) = 26 \Leftrightarrow 3x + 5 = 26 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7$ donc il existe un point de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 26, et son abscisse est **7**.

3. Équations et inéquations

3a. Résoudre une équation

Méthode : Pour résoudre une **équation** graphiquement de la forme $f(x) = a$ (ce qui revient à déterminer les **antécédents** du nombre a) on peut **tracer des pointillés d'ordonnée a**.
Les solutions sont alors les **abscisses** des points d'intersection.

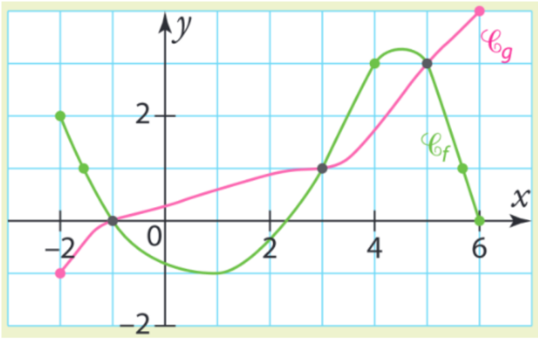
Si on veut résoudre une équation de la forme $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ on regarde les **abscisses** des **points d'intersection** des courbes $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$.



Ici, les solutions de l'équation $f(x) = -1$ sont 2 et environ 3,2.

Exemple On considère deux fonctions f et g définies sur $[-2; 6]$ dont voici ci-contre les courbes représentatives.
1. À l'aide de la courbe représentative de f, résoudre les équations suivantes.
a. $f(x) = 3$ **b.** $f(x) = 1$ **c.** $f(x) = 4$

2. À l'aide des courbes représentatives de f et g, résoudre $f(x) = g(x)$

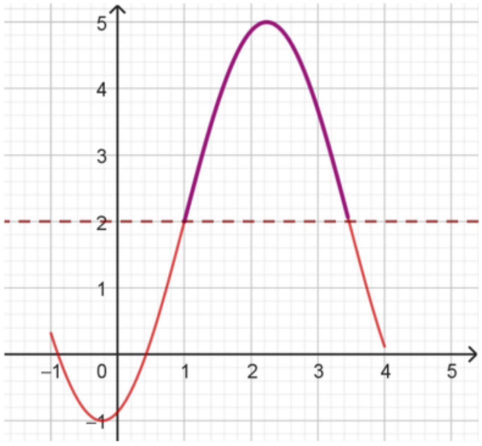


Exemple *Pour chaque question, on peut tracer (ou imaginer) des pointillés horizontaux comme dans la méthode.*
1a. $f(x) = 3$ a pour solutions **4 et 5**. *Ce sont les antécédents de 3 par* f.
1b. $f(x) = 1$ a pour solutions **environ $-1,5$; 3 et environ $5,7$**.
1c. $f(x) = 4$ n'a **pas de solution**. *Autrement dit, 4 n'a pas d'antécédent par* f.
2. *Il s'agit de donner les **abscisses** des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.*
$f(x) = g(x)$ a pour solutions **-1 ; 3 et 5**.

3b. Résoudre une inéquation

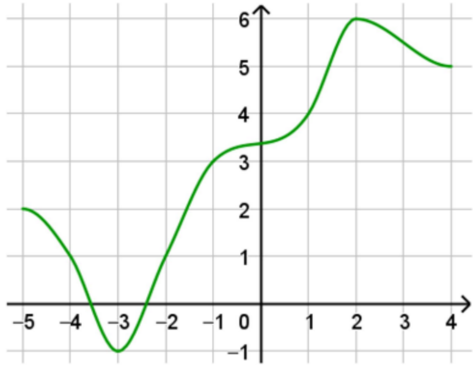
Méthode : Pour résoudre une **inéquation** graphiquement de la forme $f(x) \geq a$, on peut **tracer des pointillés d'ordonnée a**.
Les intervalles solutions correspondent aux **abscisses** où la courbe C_f est **au-dessus de a**.

Si on veut résoudre une équation de la forme $\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$ on regarde les **abscisses** des points tels que **la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g**.

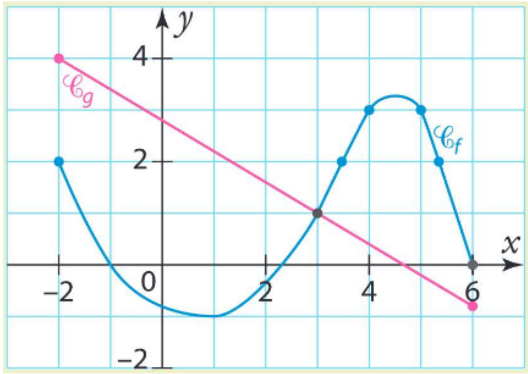


Ici, l'intervalle solution de l'inéquation $f(x) \geq 2$ est $[1; 3{,}5]$

Exemple 1 On considère la fonction f définie sur $[-5; 4]$ représentée ci-contre.
Résoudre les inéquations :
a. $f(x) \geq 3$
b. $f(x) > 3$
c. $f(x) \geq 1$



Exemple 2 On considère deux fonctions f et g définies sur $[-2; 6]$ dont voici ci-contre les courbes représentatives.
1. À l'aide de la courbe représentative de f, résoudre :
a. $f(x) \geq 3$ **b.** $f(x) < 2$
2. À l'aide des courbes représentatives de f et g, résoudre : **a.** $f(x) \leq g(x)$ **b.** $f(x) < g(x)$



Exemple 1

À nouveau, on imagine des petits pointillés horizontaux d'ordonnée 3.
a. $f(x) \geq 3$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [-1; 4]}$.
b. *Ici, c'est une inégalité stricte : on doit exclure les abscisses* x *telles que* $\mathrm{f(x)} = 3$.
$f(x) > 3$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S =]-1; 4]}$.
On n'exclut pas 4 car $\mathrm{f}(4) = 5$, *qui est bien strictement supérieur à 3.*
c. *Ici, $\mathcal{C}_\mathrm{f}$ est au-dessus de 1 à deux reprises. La réponse est donc une union de deux intervalles.*
$f(x) \geq 1$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [-5; -4] \cup [-2; 4]}$.

Exemple 2

1a. $f(x) \geq 3$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [4; 5]}$.
1b. *Ici, c'est une inégalité stricte : on doit exclure les abscisses* x *telles que* $\mathrm{f(x)} = 2$.
$f(x) < 2$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S =]-2; 3,5[\cup]5,2; 6]}$
2a. $f(x) \leq g(x)$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [-2; 3]}$
2b. *Ici, on exclut les abscisses* x *telles que* $\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)}$, *c'est-à-dire où $\mathcal{C}_\mathrm{f}$ coupe $\mathcal{C}_\mathrm{g}$.*
$f(x) < g(x)$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [-2; 3[}$

4. Fonctions paires et impaires

4a. Définition

• Une fonction paire est une fonction f telle que pour tout x réel :

$$f(-x) = f(x)$$

• Une fonction impaire est une fonction f telle que pour tout x réel :

$$f(-x) = -f(x)$$

Exemples :

• La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est paire.
En effet, pour x réel : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

• La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est impaire.
En effet, pour x réel : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

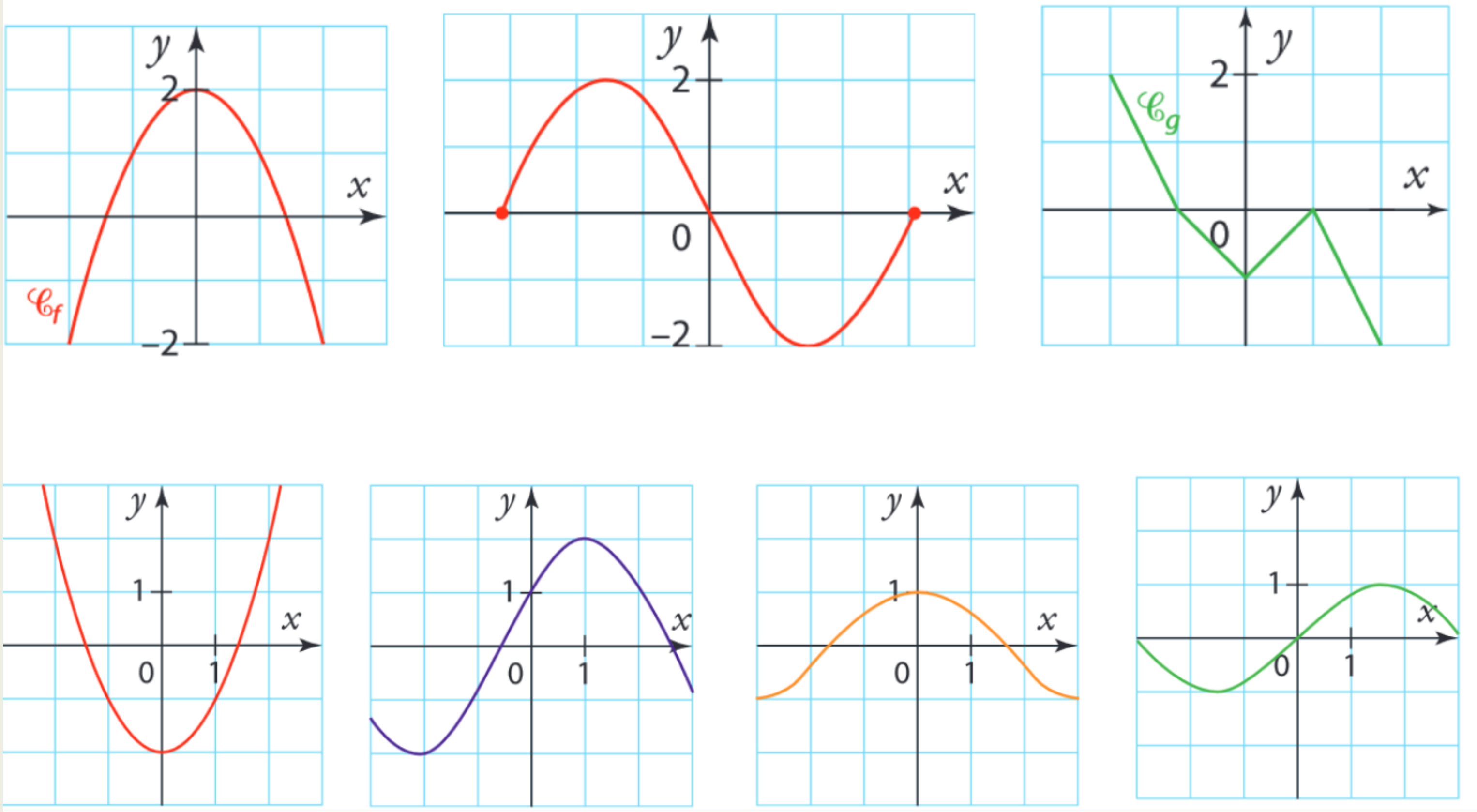
• La fonction inverse définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire.

4b. Symétrie

• Une fonction est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• Une fonction est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples Pour chaque courbe, dire si elle semble représenter une fonction paire ou impaire.



De gauche à droite, en commençant par la rangée du haut :

• la 1ère fonction est **paire**, car la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,

• la 2ème fonction est **impaire**, car la courbe est symétrique par rapport à l'origine,

• la 3ème fonction n'est **ni paire ni impaire**, car la courbe ne présente pas de symétrie,

• la 4ème fonction est **paire**, car la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,

• la 5ème fonction n'est **ni paire ni impaire**, car la courbe semble avoir un centre de symétrie, mais qui n'est pas l'origine,

• la 6ème fonction est **paire**, car la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,

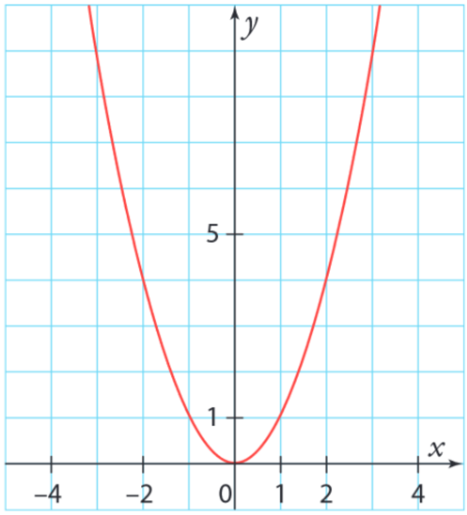
• la 7ème fonction est **impaire**, car la courbe est symétrique par rapport à l'origine.

5. Fonctions usuelles

5a. Définition

Fonction carré

$f(x) = x^2$, définie sur $\mathbb{R}$

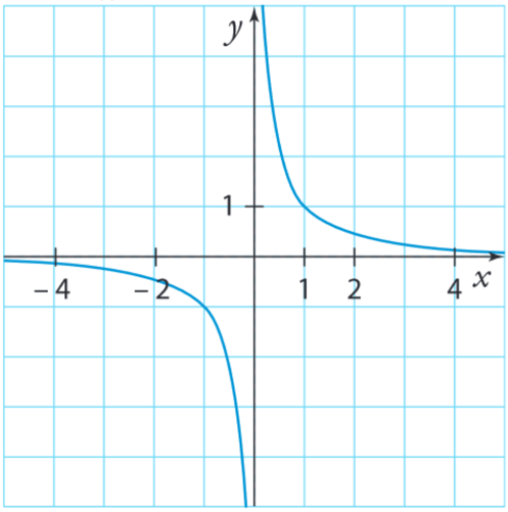


x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Elle associe à chaque réel son carré.
Elle ne prend que des **valeurs positives**.
C'est une **fonction paire** et sa courbe s'appelle une « **parabole** »

Fonction inverse

$f(x) = \frac{1}{x}$, définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

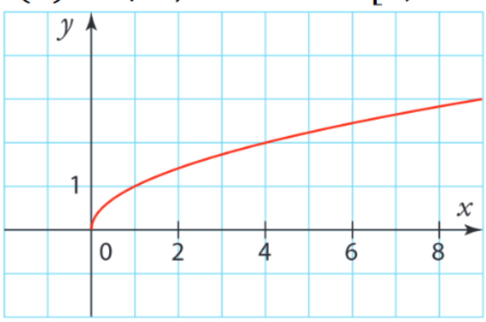


x	− 2	− 1	− 0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$	− 0,5	− 1	− 2		2	1	0,5

Elle associe à chaque réel non nul son inverse.
Elle n'est **pas définie en 0**.
C'est une **fonction impaire** et sa courbe s'appelle une « **hyperbole** »

Fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$

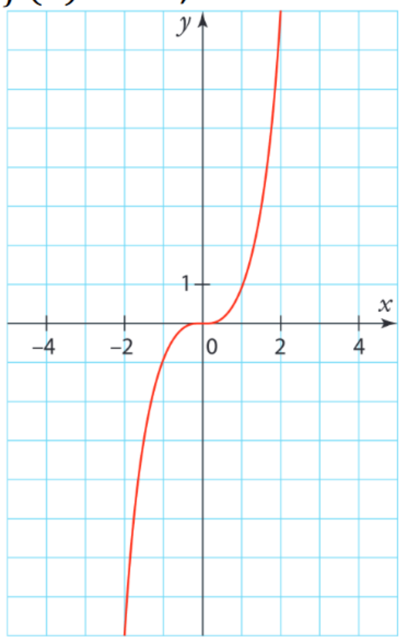


x	0	1	2	3	4	5	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	2	$\sqrt{5} \approx 2{,}24$	3

Elle associe à chaque réel positif sa racine carrée. Elle n'est pas définie pour les nombres négatifs.

Fonction cube

$f(x) = x^3$, définie sur $\mathbb{R}$



x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−8	−1	0	1	8

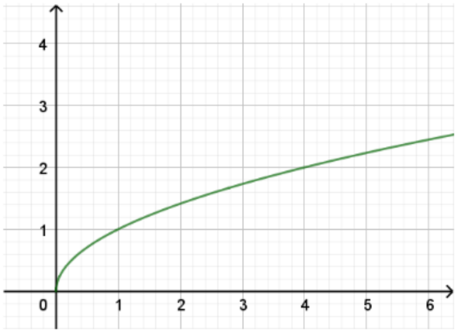
Elle associe à chaque réel son cube.
C'est une **fonction impaire**.

5b. Applications

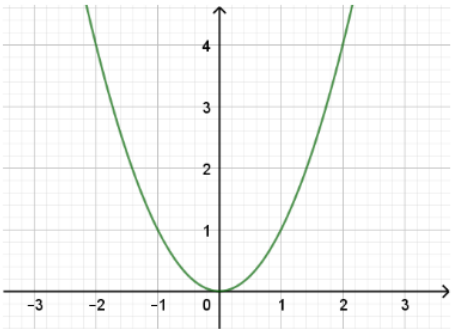
Exemple 1 Donner : **a.** L'image de -4 par la fonction carré **b.** L'image de 2 par la fonction cube
c. L'image de -10 par la fonction cube **d.** L'image de 5 par la fonction inverse
e. L'image de 49 par la fonction racine carrée **f.** L'image de 49 par la fonction carré
g. Le ou les antécédents de 36 par la fonction carré **h.** L'antécédent de $0{,}25$ par la fonction inverse

Exemple 2 Utiliser les courbes des fonctions usuelles pour résoudre les inéquations suivantes.

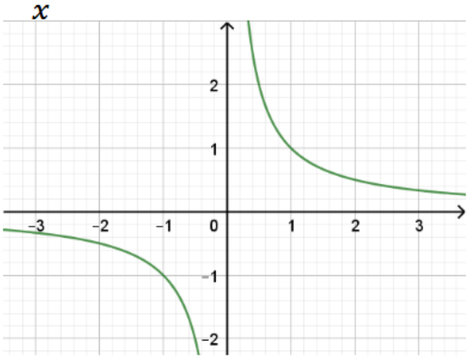
a. $\sqrt{x} \leq 2$



b. $x^2 > 3$



c. $\dfrac{1}{x} < 2$



Exemple 3 **a.** Donner l'ensemble solution de l'inéquation $\sqrt{x} \geq 7$.
b. Donner l'ensemble solution de l'inéquation $x^3 \leq 8$.
c. Si on sait que $9 \leq x \leq 100$, encadrer $\sqrt{x}$.
d. Si on sait que $-2 < x \leq 5$, encadrer x^2.

Exemple 1

a. $(-4)^2 = \mathbf{16}$ **b.** $2^3 = \mathbf{8}$ **c.** $(-10)^3 = \mathbf{-1\,000}$ **d.** $\frac{1}{5} = \mathbf{0,2}$
e. $\sqrt{49} = \mathbf{7}$ **f.** $49^2 = \mathbf{2\,401}$
g. $x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \mathbf{6}$ ou $x = \mathbf{-6}$ **h.** $\dfrac{1}{x} = 0{,}25 \Leftrightarrow x = \mathbf{4}$

Exemple 2 *On utilise la méthode vue en **partie 3b**.*
a. $\sqrt{x} \leq 2$ a pour ensemble solution $S = [\mathbf{0}; \mathbf{4}]$
b. $x^2 = 3$ a pour solution $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$,
donc $x^2 > 3$ a pour ensemble solution $S =]-\infty; \mathbf{-\sqrt{3}}[\cup]\mathbf{\sqrt{3}}; +\infty[$
c. On se rappelle que cette fonction n'est pas définie en 0.
$S =]-\infty; \mathbf{0}[\cup]\mathbf{0,5}; +\infty[$

Exemple 3 *On peut dessiner des courbes des fonctions usuelles à main levée, puis faire comme dans l'exemple précédent.*
a. $\sqrt{x} \geq 7$ a pour ensemble solution $S = [\mathbf{49}; +\infty[$
b. $x^3 \leq 8$ a pour ensemble solution $S =]-\infty; \mathbf{2}]$
c. L'image par la fonction racine carrée des nombres compris entre 9 et 100 est comprise entre 3 et 10. Donc $\mathbf{3 \leq \sqrt{x} \leq 10}$.
d. L'image par la fonction carré des nombres compris entre -2 et 5 peut être comprise entre 0 (le carré de 0) et 25 (le carré de 5). Donc $\mathbf{0 \leq x^2 \leq 25}$

6. Fonctions affines

6a. Définition

Une fonction affine est une fonction de la forme $x \mapsto mx + p$, où m et p sont des réels.
m est le coefficient directeur, p est l'ordonnée à l'origine.

Exemple Parmi les fonctions suivantes, si elles sont affines, indiquer m (coefficient directeur) et p (ordonnée à l'origine). Sinon, les barrer.

$f_1(x) = 4x - 7$ $\quad$ $f_2(x) = -x + 1{,}7$ $\quad$ $f_3(x) = x^2 + 5$ $\quad$ $f_4(x) = -8 - 5x$

$f_5(x) = 9x$ $\quad$ $f_6(x) = 12$ $\quad$ $f_7(x) = \frac{x}{2} - 9$ $\quad$ $f_8(x) = \frac{6}{x} + 5$

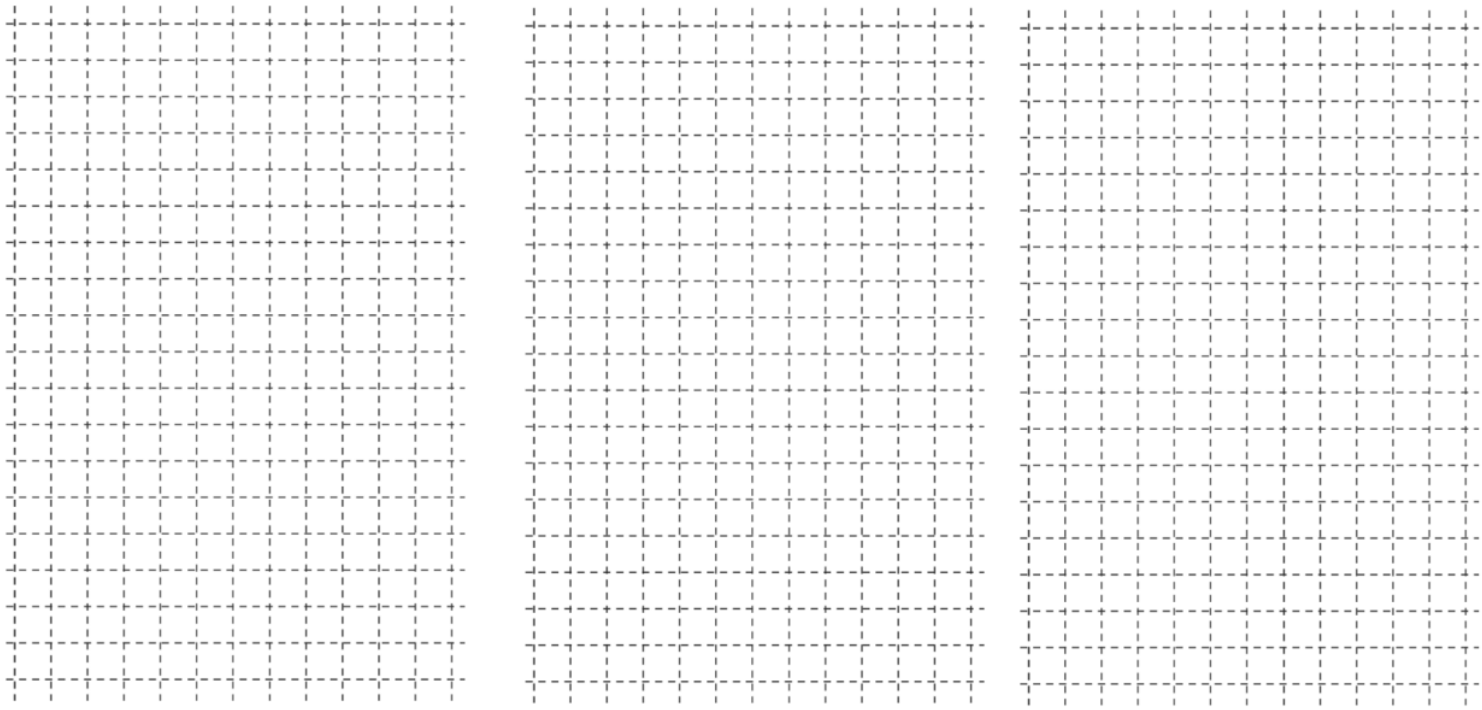
• f_1 est une fonction affine avec $m = \mathbf{4}$ et $p = \mathbf{-7}$.
• f_2 est une fonction affine avec $m = \mathbf{-1}$ et $p = \mathbf{1,7}$.
• f_3 n'est **pas une fonction affine** car x est au carré.
• f_4 est une fonction affine avec $m = \mathbf{-5}$ et $p = \mathbf{-8}$.
Ne pas oublier que quel que soit l'ordre des termes, le coefficient directeur m *est toujours le nombre qui multiplie* x.
• f_5 est une fonction affine avec $m = \mathbf{9}$ et $p = \mathbf{0}$.
Dans ce cas, on dit que f_5 *est une* ***fonction linéaire****.*
• f_6 est une fonction affine avec $m = \mathbf{0}$ et $p = \mathbf{12}$.
Dans ce cas, on dit que f_6 *est une* ***fonction constante****.*
• Diviser par 2 revient à multiplier par $\frac{1}{2}$: ainsi $f_7(x) = \frac{1}{2}x - 9$
f_7 est une fonction affine avec $m = \mathbf{\frac{1}{2}}$ et $p = \mathbf{-9}$.
• En revanche, lorsque l'on divise par x, on ne peut pas mettre x au numérateur.
f_8 n'est **pas une fonction affine**.

6b. Représentation graphique.

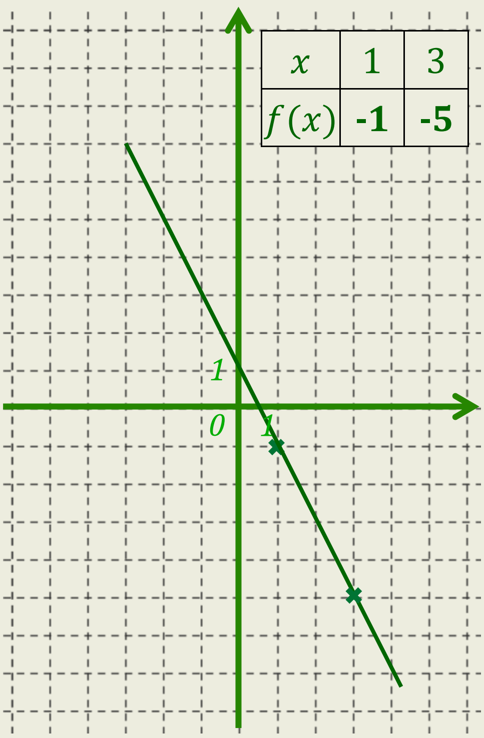
Une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ se représente par une droite.
Si m est positif, la droite « monte », si m est négatif, la droite « descend ».

Représenter les fonctions affines après avoir tracé et rempli un tableau de valeurs.

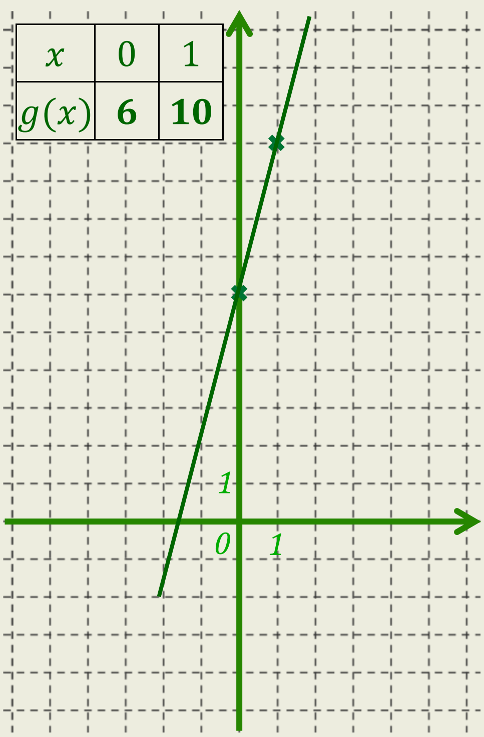
$f(x) = -2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $g(x) = 4x + 6$ définie sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $h(x) = \frac{2}{3}x - 0{,}5$ définie sur $\mathbb{R}$



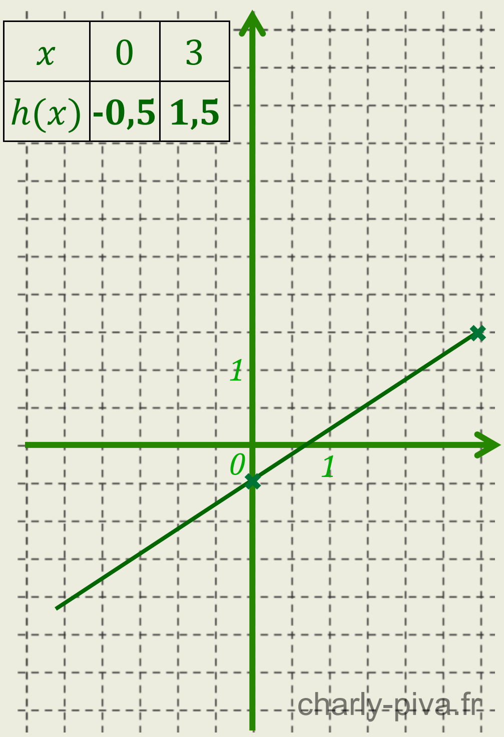
Dans les tableaux de valeurs, deux images suffisent, car il suffit de deux points pour tracer une droite. Attention pour la fonction h à bien choisir des antécédents multiples de 3 pour éviter les images non décimales.



x	1	3
$f(x)$	**-1**	**-5**



x	0	1
$g(x)$	**6**	**10**

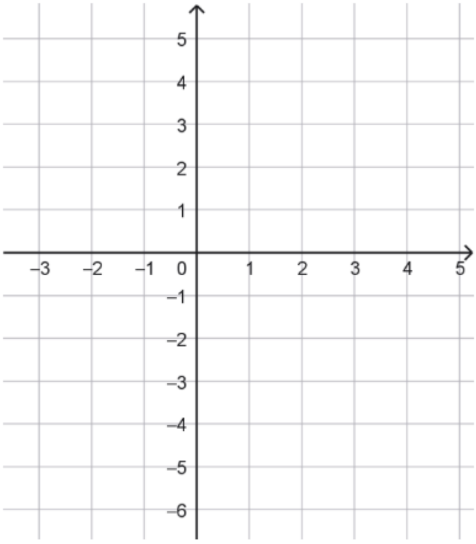


x	0	3
$h(x)$	**-0,5**	**1,5**

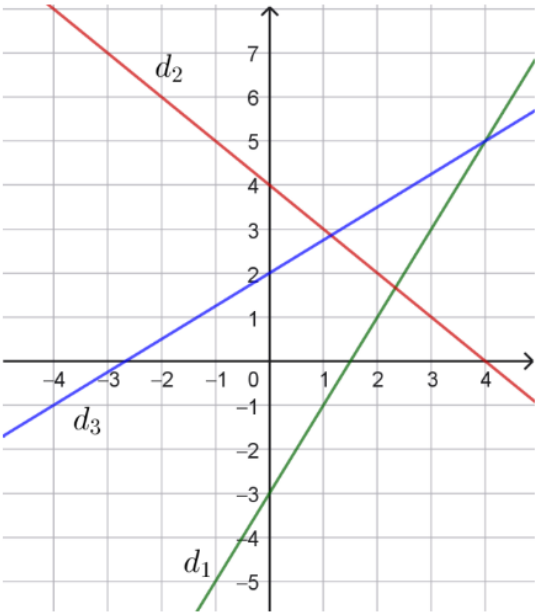
6c. Retrouver l'expression d'une fonction affine

Soient deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ d'abscisses différentes. Il existe une seule fonction affine dont la droite passe par A et par B : son coefficient directeur est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple 1 Dans le repère ci-contre, placer les points $A(1; 1)$ et $B(3; -6)$, puis déterminer le coefficient directeur de la fonction affine représentée par (AB).



Exemple 2 Dans le repère ci-contre, trois droites ont été tracées. Retrouver la fonction affine correspondant à chacune de ces trois droites.

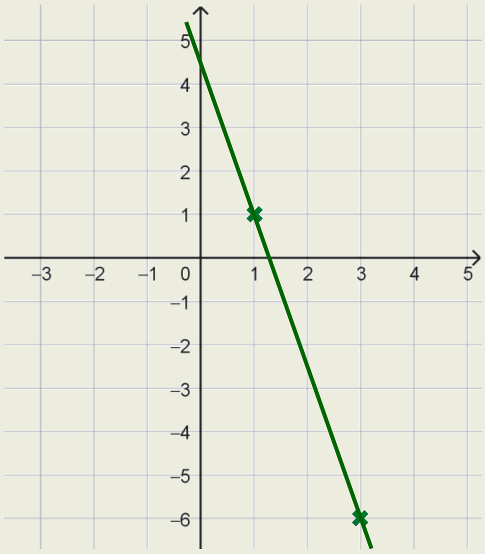


Exemple 3 On considère $A(-2; 3)$ et $B(4; 21)$.
Déterminer la fonction affine f dont la courbe représentative est (AB).

Exemple 1

On place les points A et B puis on trace la droite (AB).
Le coefficient directeur de cette droite est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6 - 1}{3 - 1} = \frac{-7}{2} = \mathbf{-3,5}$$



Exemple 2

Pour chaque fonction, il y a deux nombres à trouver :

• le coefficient directeur **m** *en appliquant la formule précédente entre deux points. On peut parfois trouver plus rapidement en se demandant, «* ***de combien on monte ou descend lorsqu'on se décale de 1 unité à droite*** *».*

• l'ordonnée à l'origine **p***, mais c'est facile : il suffit de lire l'ordonnée du* ***point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées****.*

• Pour d_1, $\boldsymbol{p = -3}$.

Ensuite, en utilisant par exemple les points de la droite $(1; -1)$ et $(2; 1)$:

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-(-1)}{2-1} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

Donc d_1 correspond à la fonction $f(x) = \boldsymbol{2x - 3}$

• Pour d_2, $\boldsymbol{p = 4}$.

Ensuite, en utilisant par exemple les points de la droite $(-2; 6)$ et $(-1; 5)$:

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-6}{-1-(-2)} = \frac{-1}{1} = \mathbf{-1}$$

Donc d_2 correspond à la fonction $f(x) = \boldsymbol{-1x + 4.}$

Autrement dit, $f(x) = \boldsymbol{-x + 4}$

• Pour d_3, $\boldsymbol{p = 2}$.

Ensuite, en utilisant par exemple les points de la droite $(0; 2)$ et $(4; 5)$:

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{4-0} = \frac{3}{4} = \mathbf{0,75}$$

Donc d_3 correspond à la fonction $f(x) = \boldsymbol{0,75x + 2}$

Exemple 3

Le coefficient directeur de la droite est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{21-3}{4-(-2)} = \frac{18}{6} = \mathbf{3}$$

Ici, on demande de déterminer la fonction affine, donc il faut aussi trouver p *!*

La fonction est de la forme $f(x) = 3x + p$.

Or le point $A(-2; 3)$ passe par la droite, donc on sait que $f(-2) = 3$,

c'est-à-dire que $3 \times (-2) + p = 3 \Leftrightarrow -6 + p = 3 \Leftrightarrow p = 3 + 6 = \mathbf{9}$

La fonction recherchée est donc $f(x) = \boldsymbol{3x + 9}$