Chapitre 3 – Équations et inéquations

1. Développer et réduire

1a. Distributivité

Soient k, a et $b \in \mathbb{R}$. Alors : $k(a+b) = ka + kb$

$k(a-b) = ka - kb$

Ces égalités servent :
- à transformer un produit en somme (développer)
- ou à transformer une somme en produit (factoriser)

Exemple 1 Développer les expressions suivantes.

$A = 3x(5x-7)$ $\quad B = -8(3x-1)$ $\quad C = -2x(-7y+3x)$ $\quad D = 6(x^2-10x+7)$

$E = -x(8x+y-7)$ $\quad F = 4x(3x^2+5x)$ $\quad G = \frac{2}{5}(\frac{15}{7}x-3)$ $\quad H = \frac{5}{7}x(\frac{1}{8}+\frac{3}{4}x)$

Exemple 2 Développer, réduire puis ordonner les expressions suivantes.
Indication : « ordonner » signifie réécrire l'expression en commençant par les termes en x^2, puis en x, puis les termes sans x.

$A = 7x(8+2x)-2x-7$ $\quad B = 5x-2(5-x)+3(4x+1-x^2)$ $\quad C = 8x(x-3)-5(x+7)+1$

Exemple 3 Factoriser les expressions suivantes.

$A = 8x+40$ $\quad B = 12x^2-27$ $\quad C = 5x+3x^2$ $\quad D = 9x-9$

$E = 6x^2+10x$ $\quad F = 5x^2+35x+40$ $\quad G = -80x+50$ $\quad H = -9x^2+12x-30$

Exemple 1 *Pour chaque expression, on distribue le facteur commun (celui qui multiplie la parenthèse) à chaque terme de la parenthèse.*
Dans les cas « simples », on peut essayer de donner la réponse de tête en une étape.

$A = 3x(5x-7)$
$A = 3x \times 5x - 3x \times 7$
$A = \mathbf{15x^2 - 21x}$

$B = -8(3x-1)$
$B = -8 \times 3x - (-8) \times 1$
$B = \mathbf{-24x + 8}$
On peut traiter la question des signes dès la deuxième étape et écrire directement $B = -8 \times 3x + 8 \times 1$.

$C = -2x(-7y+3x)$
$C = -2x \times (-7y) + (-2x) \times 3x$
$C = \mathbf{14xy - 6x^2}$

$D = 6(x^2-10x+7)$
$D = 6 \times x^2 - 6 \times 10x + 6 \times 7$
$D = \mathbf{6x^2 - 60x + 42}$

$E = -x(8x+y-7)$
$E = -x \times 8x - x \times y + x \times 7$
$E = \mathbf{-8x^2 - xy + 7x}$

$F = 4x(3x^2+5x)$
$F = 4x \times 3x^2 + 4x \times 5x$
$F = \mathbf{12x^3 + 20x^2}$

$G = \frac{2}{5}\left(\frac{15}{7}x - 3\right)$

$G = \frac{2}{5} \times \frac{15}{7}x - \frac{2}{5} \times 3$

$G = \frac{30}{35}x - \frac{6}{5}$

$G = \boldsymbol{\frac{6}{7}x - \frac{6}{5}}$

$H = \frac{5}{7}x\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}x\right)$

$H = \frac{5}{7}x \times \frac{1}{8} + \frac{5}{7}x \times \frac{3}{4}x$

$H = \boldsymbol{\frac{5}{56}x + \frac{15}{28}x^2}$

Exemple 2 *On peut réduire et ordonner en même temps, en ajoutant d'abord tous les termes en* x^2*, puis tous les termes en* x*…*

$A = 7x(8 + 2x) - 2x - 7$

$A = 7x \times 8 + 7x \times 2x - 2x - 7$

$A = 56x + 14x^2 - 2x - 7$

$A = \boldsymbol{14x^2 + 54x - 7}$

$B = 5x - 2(5 - x) + 3(4x + 1 - x^2)$

$B = 5x - 2 \times 5 - (-2) \times x + 3 \times 4x + 3 \times 1 - 3 \times x^2$

$B = 5x - 10 + 2x + 12x + 3 - 3x^2$

$B = \boldsymbol{-3x^2 + 19x - 7}$

$C = 8x(x - 3) - 5(x + 7) + 1$

$C = 8x \times x - 8x \times 3 - 5 \times x + (-5) \times 7 + 1$

$C = 8x^2 - 24x - 5x - 35 + 1$

$C = \boldsymbol{8x^2 - 29x - 34}$

Exemple 3

$A = 8x + 40$

$A = 8 \times x + 8 \times 5$

$A = \boldsymbol{8(x + 5)}$

$C = 5x + 3x^2$

$C = x \times 5 + x \times 3x$

$C = \boldsymbol{x(5 + 3x)}$

$E = 6x^2 + 10x$

$E = 2x \times 3x + 2x \times 5$

$E = \boldsymbol{2x(3x + 5)}$

$2(3\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x})$ *ou* $\mathrm{x}(6\mathrm{x} + 10)$ *ne sont pas des « bonnes » réponses, car on peut encore les factoriser.*

$G = -80x + 50$

$G = 10 \times (-8x) + 10 \times 5$

$G = \boldsymbol{10(-8x + 5)}$ ou $\boldsymbol{-10(8\mathrm{x} - 5)}$

$B = 12x^2 - 27$

$B = 3 \times 4x^2 - 3 \times 9$

$B = \boldsymbol{3(4x^2 - 9)}$

$D = 9x - 9$

$D = 9 \times x - 9 \times 1$

$D = \boldsymbol{9(x - 1)}$

$F = 5x^2 + 35x + 40$

$F = 5 \times x^2 + 5 \times 7x + 5 \times 8$

$F = \boldsymbol{5(x^2 + 7x + 8)}$

$H = -9x^2 + 12x - 30$

$H = 3 \times (-3x^2) + 3 \times 4x - 3 \times 10$

$H = \boldsymbol{3(-3x^2 + 4x - 10)}$

ou $\boldsymbol{-3(3\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 10)}$

1b. Suppression de parenthèses

En l'absence de multiplications :

- Si une parenthèse est précédée d'un signe +, on peut supprimer la parenthèse sans changer les signes.
- Mais si elle est précédée d'un signe – ,

il faut changer les signes de son contenu.

Exemple 1 Développer et réduire les expressions.

$A = -(3x-7) + (x-4+2x^2)$ $B = (5y-8) - (-5-9x+x^2)$ $C = -3(x+2) - (7-x) + (x-4)$

Exemple 2 Donner l'opposé des expressions suivantes.

$A = 4x - 3$ $B = -3x + 7$ $C = 2x^2 - 3x + 5$ $D = -x^2 + (-3)x + 1$

Exemple 1

$A = -(3x-7) + (x-4+2x^2)$
$A = -3x + 7 + x - 4 - 2x^2$
$A = \mathbf{-2x^2 - 2x + 3}$

$B = (5y-8) - (-5-9x+x^2)$
$B = 5y - 8 + 5 + 9x - x^2$
$B = \mathbf{-x^2 + 9x + 5y - 3}$

$C = -3(x+2) - (7-x) + (x-4)$
$C = -3 \times x + (-3) \times 2 - 7 + x + x - 4$
$C = -3x - 6 - 7 + x + x - 4$
$C = \mathbf{-x - 17}$

Exemple 2

$-A = -(4x-3) = \mathbf{-4x + 3}$
$-B = -(-3x+7) = \mathbf{3x - 7}$
$-C = -(2x^2 - 3x + 5) = \mathbf{-2x^2 + 3x - 5}$
$-D = -(-x^2 - 3x + 1) = \mathbf{x^2 + 3x - 1}$

1c. Développement double

Soient a, b, c et d quatre réels. Alors :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple Développer, réduire et ordonner les expressions.

$A = (2+x)(3+x)$ $\quad$ $B = (2x-5)(7-4x)$ $\quad$ $C = (x+1)(x^2-3x)$

$D = 5(7-x)(2x+9)$ $\quad$ $E = 1 + 7x(3-x)$ $\quad$ $F = -(1{,}5x-3)(4x-0{,}5)$

$A = (2+x)(3+x)$
$A = 2 \times 3 + 2 \times x + x \times 3 + x \times x$
$A = 6 + 2x + 3x + x^2$
$A = \boldsymbol{x^2 + 5x + 6}$

$B = (2x-5x)(7-4x)$
$B = 2x \times 7 - 2x \times 4x - 5 \times 7 + 5 \times 4x$
$B = 14x - 8x^2 - 35 + 20x$
$\boldsymbol{B = -8x^2 + 34x - 35}$

$C = (x+1)(x^2-3x)$
$C = x \times x^2 - x \times 3x + 1 \times x^2 - 1 \times 3x$
$C = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x$
$C = \boldsymbol{x^3 - 2x^2 - 3x}$

$D = 5(7-x)(2x+9)$
On a un développement simple, puis un double. Le plus simple est d'effectuer le développement simple de tête, en pensant bien à laisser la parenthèse, puis d'effectuer le développement double.
$D = (35-5x)(2x+9)$
$D = 35 \times 2x + 35 \times 9 - 5x \times 2x - 5x \times 9$
$D = 70x + 315 - 10x^2 - 45x$
$D = \boldsymbol{-10x^2 + 25x + 315}$

$E = 1 + 7x(3-x)$
Attention, ce n'est pas un développement double, seul le 7x multiplie la parenthèse. C'est un développement simple.
$E = 1 + 7x \times 3 - 7x \times x$
$E = 1 + 21x - 7x^2$
$E = \boldsymbol{-7x^2 + 21x + 1}$

$F = -(1{,}5x-3)(4x-0{,}5)$
Un signe – précède la première parenthèse. On change le signe de son contenu (attention, on ne change les signes que dans une seule parenthèse, pas les deux).
$F = (-1{,}5x+3)(4x-0{,}5)$
$F = -1{,}5x \times 4x + 1{,}5x \times 0{,}5 + 3 \times 4x - 3 \times 0{,}5$
$F = -6x^2 + 0{,}75x + 12x - 1{,}5$
$F = \boldsymbol{-6x^2 + 12{,}75x - 1{,}5}$

2. Équations

2a. Équations linéaires

Une équation est une égalité comportant un nombre inconnu, noté x.

Remarques :

- Les nombres qui conviennent forment l'ensemble solution, noté S.
- Entre chaque étape d'une équation, on utilise le symbole $\Leftrightarrow$ qui signifie « équivaut à ».

Méthode : pour résoudre une équation, le but est d'abord de placer tous les termes en x dans un membre (souvent à gauche), et tous les autres termes dans l'autre membre (souvent à droite).

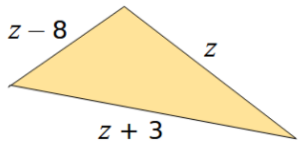
Exemple 1 *(équations classiques)*

a. $3x + 7 = 19$ **b.** $-1 + 3x = -18{,}5 - 4x$ **c.** $10 + 6x = 36 - 7x$ **d.** $4(x - 5) = 10x + 1$

Exemple 2 *(avec des fractions)* **a.** $\frac{x}{7} + \frac{1}{3} = 5$ **b.** $\frac{2x}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

Exemple 3 Dans chaque égalité, exprimer y en fonction de x. **a.** $5x - y + 1 = 3x - 2$ **b.** $8x + 2y = 14x - 2$

Exemple 4 Un marchand dépense 75 € par semaine pour confectionner ses glaces. Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il vendre au minimum de glaces dans la semaine pour avoir un bénéfice égal à 80 € ?



Exemple 5 Dans la figure ci-contre, trouver la valeur de z sachant que le périmètre du triangle ci-contre vaut 61.

Exemple 1 *La résolution de ces équations suit toujours la même trame :*

- dans un premier temps, on place tous les termes en x *dans le membre de gauche, et tous les termes sans* x *dans le membre de droite. Quand on* ***déplace un terme****, on pense à* ***changer son signe****.*

- on se retrouve alors avec une équation de la forme $ax = b$*. À ce moment, on divise le nombre de droite* b *par le nombre qui multiplie* x *(c'est-à-dire* a*).*

a. $3x + 7 = 19$
$\Leftrightarrow 3x = 19 - 7$
$\Leftrightarrow 3x = 12$
$\Leftrightarrow x = \frac{12}{3}$
$\Leftrightarrow x = 4$. Donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{4}\}$.

b. $-1 + 3x = -18{,}5 - 4x$
$\Leftrightarrow 3x + 4x = -18{,}5 + 1$
$\Leftrightarrow 7x = -17{,}5$
$\Leftrightarrow x = \frac{-17{,}5}{7}$
$\Leftrightarrow x = -2{,}5$. Donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{-2,5}\}$.

c. $10 + 6x = 36 - 7x$
$\Leftrightarrow 6x + 7x = 36 - 10$
$\Leftrightarrow 13x = 26$
$\Leftrightarrow x = \frac{26}{13}$
$\Leftrightarrow x = 2$. Donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{2}\}$.

d. $4(x - 5) = 10x + 1$ *On doit d'abord développer le 4.*
$\Leftrightarrow 4x - 20 = 10x + 1$
$\Leftrightarrow 4x - 10x = 20 + 1$
$\Leftrightarrow -6x = 21$
$\Leftrightarrow x = \frac{21}{-6}$
$\Leftrightarrow x = -3{,}5$. Donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{-3,5}\}$.

Exemple 2 *On suit la même méthode, mais quand on ajoute des fractions, il faut les réduire au même dénominateur.*

a. $\frac{x}{7}+\frac{1}{3}=5$

$\Leftrightarrow \frac{x}{7}=5-\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{7}=\frac{15}{3}-\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{7}=\frac{14}{3}$

L'opération inverse d'une division par 7 est une multiplication par 7.

$\Leftrightarrow x=\frac{14}{3}\times 7$

$\Leftrightarrow x=\frac{98}{3}$ et $\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{\frac{98}{3}}\right\}$

b. $\frac{2x}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{5}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \frac{6x}{15}-\frac{5x}{15}=\frac{5}{10}+\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{15}=\frac{6}{10}$

$\Leftrightarrow x=\frac{6}{10}\times 15$

$\Leftrightarrow x=\frac{90}{10}$

$\Leftrightarrow x=9$ et $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{9}\}$

Exemple 3 *En appliquant les mêmes règles, il faut isoler y à gauche.*

a. $5x-y+1=3x-2$

$\Leftrightarrow -y=3x-2-5x-1$

$\Leftrightarrow -y=-2x-3$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{y=2x+3}$

b. $8x+2y=14x-2$

$\Leftrightarrow 2y=14x-2-8x$

$\Leftrightarrow 2y=6x-2$

$\Leftrightarrow y=\frac{6x-2}{2}$

$\Leftrightarrow y=\boldsymbol{3x-1}$

Exemple 4 Soit x le nombre de glaces vendues. On met le problème en équation.

$$2{,}5x-75=80$$
$$\Leftrightarrow 2{,}5x=80+75$$
$$\Leftrightarrow 2{,}5x=155$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{155}{2{,}5}=62$$

Le marchand devra donc vendre **62 glaces** pour avoir un bénéfice de 76€.

Exemple 5 Le périmètre d'un triangle est la somme des longueurs de ses côtés. Ainsi, la question revient à résoudre l'équation :

$$z-8+z+z+3=61$$
$$\Leftrightarrow 3z-5=61$$
$$\Leftrightarrow 3z=61+5$$
$$\Leftrightarrow 3z=66$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{66}{3}=\mathbf{22}$$

2b. Équations $x^2 = a$

Soit $a \in [0;+\infty[$ (cela signifie que a est positif).
L'ensemble solution de l'équation $x^2 = a$ est $S = \{-\sqrt{a};\sqrt{a}\}$
Si a est négatif, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution. On note $S = \emptyset$

Exemple Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2 = 36$ **b.** $x^2 = 0$ **c.** $x^2 - 144 = 0$ **d.** $x^2 - 80 = 0$ **e.** $2x^2 - 4{,}5 = 0$ **f.** $x^2 + 3 = 0$

<u>Remarque</u> : en 2^{nde}, on ne sait pas encore bien résoudre les équations qui « mélangent » x^2 et x, par exemple $x^2 + 5x = -6$.

a. $x^2 = 36$
D'après la propriété, l'ensemble solution devrait être $\{-\sqrt{36};\sqrt{36}\}$.
Mais 36 est un carré parfait : $\sqrt{36} = 6$.
$\boldsymbol{S = \{-6;6\}}$

b. $x^2 = 0$
C'est un cas particulier : le seul nombre dont le carré est 0 est… 0.
$\boldsymbol{S = \{0\}}$

c. $x^2 - 144 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 144$
À nouveau, il s'agit d'un carré parfait : $\sqrt{144} = 12$.
$\boldsymbol{S = \{-12;12\}}$

d. $x^2 - 80 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 80$
Cette fois, 80 n'est pas un carré parfait et $\sqrt{80}$ est un nombre non décimal, qui vaut environ 8,94.
$\boldsymbol{S = \{-\sqrt{80};\sqrt{80}\}}$

e. $2x^2 - 4{,}5 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 = 4{,}5$
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4{,}5}{2}$
$\Leftrightarrow x^2 = 2{,}25$
Or on vérifie (à la calculatrice ?) que $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.
$\boldsymbol{S = \{-1,5;1,5\}}$

f. $x^2 + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = -3$
Cette équation n'a pas de solution, car un carré ne peut pas être négatif. L'ensemble solution est donc l'ensemble vide.
$\boldsymbol{S = \emptyset}$

2c. Équations quotient

Propriété du produit en croix :

Soient a, b, c et d quatre réels, b et d non nuls. Alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Exemple 1 Résoudre les équations suivantes, en précisant pour quelles valeurs de x l'équation est définie.

a. $\frac{5x-1}{x-4} = 0$ **b.** $\frac{3}{x-7} = \frac{-5}{3x+2}$

Exemple 2 La distance de freinage d'un véhicule est donnée par la formule suivante : $D_f = \frac{V^2}{2gA}$ où V est la vitesse en m/s, A est le coefficient d'adhérence, et $g = 9{,}81$.

a. Calculer la distance de freinage d'un véhicule roulant à 100 km/h sur route sèche (coefficient $A = 0{,}6$).

b. À quelle vitesse doit rouler ce même véhicule sur chaussée humide (coefficient $A = 0{,}4$) pour que sa distance de freinage reste inchangée ?

Exemple 3 Soient x et y deux réels tels que $x = \frac{y-3}{8-2y}$.

a. Pour quelles valeurs de y cette égalité est-elle définie ?

b. Exprimer y en fonction de x.

Exemple 1

a. $\frac{5x-1}{x-4} = 0$

On recherche d'abord la valeur interdite, car on n'a pas le droite de diviser par 0.

Or $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. La **valeur interdite** est donc **4**.

Ensuite, on applique la propriété du produit en croix :

$\frac{5x-1}{x-4} = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 1 = 0(x-4)$

Un produit par 0 donne toujours 0.

$\Leftrightarrow 5x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 5x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow x = 0{,}2$ et $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{0{,}2}\}$.

b. $\frac{3}{x-7} = \frac{-5}{3x+2}$

On recherche les valeurs interdites.

$x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ et $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

Les **valeurs interdites** sont **7 et** $-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

On applique maintenant la propriété du produit en croix.

$\frac{3}{x-7} = \frac{-5}{3x+2}$

$\Leftrightarrow 3(3x+2) = -5(x-7)$

$\Leftrightarrow 9x + 6 = -5x + 35$

$\Leftrightarrow 9x + 5x = -6 + 35$

$\Leftrightarrow 14x = 29$

$\Leftrightarrow x = \frac{29}{14}$ et $\boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{14}}\right\}$

Exemple 2

a. *La formule fait intervenir la vitesse en mètres par seconde. Il faut convertir.*

100 km/h = 100 000 m/h. Or 1 h = 60 × 60 = 3 600 s. Donc :

$100\text{ km/h} = \dfrac{100\ 000}{3\ 600}\text{ m/s} \approx \mathbf{28\ m/s}$.

On peut maintenant calculer la distance de freinage :

$$D_f = \frac{V^2}{2gA} \approx \frac{28^2}{2 \times 9{,}81 \times 0{,}6} \approx \mathbf{67\ m}$$

b. Ici, on connaît $D_f \approx 67$, on a $A = 0{,}4$ et on cherche V. Par produit en croix :

$$D_f = \frac{V^2}{2gA} \Leftrightarrow V^2 = D_f \times 2gA \approx 67 \times 2 \times 9{,}81 \times 0{,}4 \approx 526$$

Ainsi, $V^2 \approx 526$, et cette vitesse est positive, donc $V \approx \sqrt{526} \approx \mathbf{23\ m/s}$

Or $23\text{ m/s} = 23 \times 3\ 600\text{ m/h} = 82\ 800\text{ m/h} = \mathbf{82{,}8\ km/h}$

Il faudra donc rouler à 82,8 km/h pour avoir la même distance de freinage.

Exemple 3

a. *On cherche la valeur interdite.*

$8 - 2y = 0 \Leftrightarrow -2y = 8 \Leftrightarrow y = -4$

La valeur interdite est $y = -4$

L'expression est définie pour tous les nombres réels sauf -4, ce qu'on peut noter $\mathbb{R}\backslash\{\mathbf{-4}\}$ ou bien $]-\infty; \mathbf{-4}[\cup]-\mathbf{4}; +\infty[$.

b. *On applique la propriété du produit en croix. Le but est ensuite d'isoler y.*

$x = \dfrac{y-3}{8-2y}$

$\Leftrightarrow x(8-2y) = y - 3$

$\Leftrightarrow 8x - 2yx = y - 3$

$\Leftrightarrow -y - 2yx = -3 - 8x$

$\Leftrightarrow y(-1-2x) = -3 - 8x$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \dfrac{\mathbf{-3-8}\boldsymbol{x}}{\mathbf{-1-2}\boldsymbol{x}}$

3. Inéquations

3a. Définition

Une inéquation est une inégalité comportant un nombre inconnu.

Méthode : Pour résoudre une inéquation, on applique **presque la même méthode que pour les équations**.

- *On peut ajouter ou soustraire des nombres à une inégalité :*

si $a < b$, alors $a + k < b + k$ et $a - k < b - k$.

- *On peut multiplier ou diviser une inégalité par un* ***nombre positif*** *:*

si $a < b$ et **k est positif**, alors $ka < kb$ et $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$

- *On peut multiplier ou diviser une inégalité par un* ***nombre négatif, mais cela change le sens de l'inégalité*** *:*

si $a < b$ et **k est négatif**, alors $ka > kb$ et $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$

Autres propriétés :

- Si a et b sont deux réels tels que $\boldsymbol{a < b}$, alors $\boldsymbol{-a > -b}$
- Si a et b sont deux réels non nuls tels que $\boldsymbol{a < b}$, alors $\boldsymbol{\frac{1}{a} > \frac{1}{b}}$
- Si a, b, c et d sont quatre réels tels que $\boldsymbol{a < b}$ et $\boldsymbol{c < d}$, alors $\boldsymbol{a + c < b + d}$

Exemple Résoudre les inéquations et représenter l'ensemble solution par un intervalle.

a. $2x + 2 < 3$ **b.** $-8x + 1 \geq 46 + x$ **c.** $-4x + 7 \leq -3x - 3$ **d.** $7(x + 5) > 3(x - 4)$

a. $2x + 2 < 3$

$\Leftrightarrow 2x < 3 - 2$

$\Leftrightarrow 2x < 1$

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

On a divisé par 2, le sens de l'inégalité ne change pas. Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$.

$\boldsymbol{S} =]-\infty; \boldsymbol{\frac{1}{2}}[$

b. $-8x + 1 \geq 46 + x$

$\Leftrightarrow -8x - x \geq 46 - 1$

$\Leftrightarrow -9x \geq 45$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{45}{\boldsymbol{-9}}$

$\Leftrightarrow x \leq -5$

On a divisé par -9, le sens de l'inégalité change. Les solutions sont les nombres inférieurs ou égaux à -5.

$\boldsymbol{S} =]-\infty; \boldsymbol{-5}]$

c. $-4x + 7 \leq -3x - 3$

$\Leftrightarrow -4x + 3x \leq -3 - 7$

$\Leftrightarrow -x \leq -10$

$\Leftrightarrow x \geq 10$

On a changé les signes, donc le sens de l'inégalité change.

$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{10}; +\infty[$

d. $7(x + 5) > 3(x - 4)$

$\Leftrightarrow 7x + 35 > 3x - 12$

$\Leftrightarrow 7x - 3x > -35 - 12$

$\Leftrightarrow 4x > -47$

$\Leftrightarrow x > -\frac{47}{4}$

On a divisé par 4, le sens de l'inégalité ne change pas.

$\boldsymbol{S} = [-\boldsymbol{\frac{47}{4}}; +\infty[$

3b. Comparaisons

Définition : Comparer deux expressions littérales $A(x)$ et $B(x)$, c'est dire pour quelles valeurs de x, $A(x)$ est plus grand que $B(x)$. Pour cela, on peut résoudre l'inéquation $\boldsymbol{A(x) \geq B(x)}$ ou l'inéquation $\boldsymbol{A(x) - B(x) \geq 0}$.

Exemple 1
Comparer les expressions $A(x) = 18 - 4x$ et $B(x) = 5(2x - 7)$

Exemple 2
Dans une ville, deux applications permettant de faire des trajets en voiture avec chauffeur sont en concurrence.
- un trajet avec l'application M coûte 3,40 €, plus 2,80 € par kilomètre parcouru.
- un trajet avec l'application N coûte 5,25 €, plus 2,30 € par kilomètre parcouru.

Exprimer le prix payé avec chaque application, puis déterminer à partir de combien de km l'application N coûte moins cher que l'application M.

Exemple 3
Un rectangle est tel que sa longueur est 7 cm plus grande que sa largeur.
Comment doit être la largeur pour que le périmètre du rectangle soit supérieur ou égal à 41 cm ?

Exemple 1

$A(x) \geq B(x)$
$\Leftrightarrow 18 - 4x \geq 5(2x - 7)$
$\Leftrightarrow 18 - 4x \geq 10x - 35$
$\Leftrightarrow -4x - 10x \geq -18 - 35$
$\Leftrightarrow -14x \geq -53$
$\Leftrightarrow x \leq -\frac{53}{14}$

L'expression A est supérieure à l'expression B pour **x supérieur à $-\frac{53}{14}$** c'est-à-dire environ $-3,8$.

Exemple 2

Soit x la distance parcourue en km.
Le prix payé avec M est : $3,4 + 2,8x$
Le prix payé avec N est : $5,25 + 2,3x$
Le problème se met en inéquation :
$3,4 + 2,8x > 5,25 + 2,3x$
$\Leftrightarrow 2,8x - 2,3x > 5,25 - 3,4$
$\Leftrightarrow 0,5x > 1,85$
$\Leftrightarrow x > \frac{1,85}{0,5}$
$\Leftrightarrow x > 3,7$

L'application N devient moins chère que l'application M **à partir de 3,7 km parcourus**.

Exemple 3

Soit x la largeur du rectangle. Alors la longueur est $x + 7$,
et le périmètre est $2x + 2(x + 7)$. La question se met en équation :
$2x + 2(x + 7) \geq 41$
$\Leftrightarrow 2x + 2x + 14 \geq 41$
$\Leftrightarrow 4x + 14 \geq 41$
$\Leftrightarrow 4x \geq 41 - 14$
$\Leftrightarrow 4x \geq 27$
$\Leftrightarrow x \geq \frac{27}{4}$
$\Leftrightarrow x \geq 6,75$

Ainsi, le périmètre est supérieur ou égal à 41 cm, si la largeur est **supérieure ou égale à 6,75 cm**.

3c. Inéquations $x^2 \leq a$

Soit $a > 0$.

• l'inéquation $x^2 \leq a$ a pour ensemble solution : $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$

• l'inéquation $x^2 \geq a$ a pour ensemble solution : $]-\infty; -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}; +\infty[$

Exemple Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2 - 15 \geq 34$ **b.** $10 + 3x^2 \leq 28$ **c.** $10 + 5x^2 \geq 6x^2 - 134$

a. $x^2 - 15 \geq 34$
$\Leftrightarrow x^2 \geq 34 + 15$
$\Leftrightarrow x^2 \geq 49$.
L'ensemble solution est $S =]-\infty; -\sqrt{49}] \cup [\sqrt{49}; +\infty[$,
autrement dit $\boldsymbol{S} =]-\infty; -\mathbf{7}] \cup [\mathbf{7}; +\infty[$

b. $10 + 3x^2 \leq 28$
$\Leftrightarrow 3x^2 \leq 28 - 10$
$\Leftrightarrow 3x^2 \leq 18$
$\Leftrightarrow x^2 \leq 6$
L'ensemble solution est $\boldsymbol{S} = [-\sqrt{\mathbf{6}}; \sqrt{\mathbf{6}}]$
6 n'étant pas un carré parfait, on ne peut pas l'écrire plus simplement.

c. $10 + 5x^2 \geq 6x^2 - 134$
$\Leftrightarrow 5x^2 - 6x^2 \geq -134 - 10$
$\Leftrightarrow -x^2 \geq -144$
$\Leftrightarrow x^2 \leq 144$ *Changer le signe des membres change le sens de l'inégalité.*
L'ensemble solution est $S = [-\sqrt{144}; \sqrt{144}]$, c'est-à-dire $\boldsymbol{S} = [-\mathbf{12}; \mathbf{12}]$

4. Tableaux de signes

4a. Définition

Un tableau de signes permet de dire pour quelles valeurs de x une expression $A(x)$ est positive ou négative.
Pour savoir où placer les signes « + », on résout l'inéquation $A(x) \geq 0$.

Exemple Dresser le tableau de signes de chaque expression.

$A(x) = 4x - 12$ $B(x) = -5x - 12$ $C(x) = -3x - 7$ $D(x) = x^2 - 36$

• $A(x) = 4x - 12$. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} &4x - 12 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &4x \geq 12 \\ \Leftrightarrow\ &x \geq \frac{12}{4} \\ \Leftrightarrow\ &x \geq \mathbf{3} \end{aligned}$$

On trouve que A(x) *est positif pour* x *supérieur ou égal à 3. Dans le tableau, on écrit donc « + » dans la partie à droite de 3, et « − » à gauche de 3.*

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$4x + 12$		$-$	0	$+$	

• $B(x) = -5x - 12$. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} &-5x - 12 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &-5x \geq 12 \\ \Leftrightarrow\ &x \leq \frac{12}{-5} \\ \Leftrightarrow\ &x \leq \mathbf{-2,4} \end{aligned}$$

L'inéquation a changé de sens car on a divisé par -5*, un nombre négatif.*
On trouve que B(x) *est positif pour* x *inférieur ou égal à* $-2{,}4$*. Dans le tableau, on écrit donc « + » dans la partie à gauche de* $-2{,}4$*, et « − » à droite de* $-2{,}4$*.*

x	$-\infty$		$-2,4$		$+\infty$
$-5x - 12$		$+$	0	$-$	

• $C(x) = -3x - 7$. On résout l'inéquation :

$$-3x - 7 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow -3x \geq 7$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{7}{-3}$$
$$\Leftrightarrow x \leq -\mathbf{\frac{7}{3}}$$

Ce nombre n'étant pas décimal, on le laisse sous forme de fraction.
On trouve que C(x) *est positif pour* x *inférieur ou égal à* $-\frac{7}{3}$. *Dans le tableau, on écrit donc « + » dans la partie à gauche de* $-\frac{7}{3}$ *et « − » à droite de* $-\frac{7}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$-3x-7$		$+$	0	$-$	

• $D(x) = x^2 - 36$. On résout l'inéquation :

$$x^2 - 36 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 \geq 36$$

Cette inéquation a pour solution $]-\infty; \mathbf{-6}] \cup [\mathbf{6}; +\infty[$
Ainsi, dans le tableau de signes, on écrit « + » de $-\infty$ *à* -6 *; puis « − » de* -6 *à* 6, *et enfin « + » de* 6 *à* $+\infty$.

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
x^2-36		$+$	0	$-$	0	$+$	

4b. Propriété

Soient m et p deux réels, avec m non nul.

L'expression $mx + p$ s'annule pour $x = -\frac{p}{m}$ et son signe est :

- si m est positif : d'abord négatif, puis positif
- si m est négatif : d'abord positif, puis négatif

Exemple Dresser le tableau de signes de chaque expression, en utilisant la propriété.

$A(x) = 2x + 7$ $\quad B(x) = -4x - 11$ $\quad C(x) = x - 3{,}9$ $\quad D(x) = -2(3x - 1) + 5x$

Notez que si cette méthode ne vous plaît pas, vous avez le droit de n'utiliser que celle vue en ***4a****.*

• $A(x) = 2x + 7$. *Dans cette expression,* $\mathrm{m} = 2$ *et* $\mathrm{p} = 7$.

On calcule $-\frac{p}{m} = -\frac{7}{2} = \mathbf{-3,5}$

De plus, $m = 2$ est **positif.**

On écrit donc « − » à gauche de −3,5 puis « + » à droite.

x	$-\infty$		$-3,5$		$+\infty$
$2x+7$		$-$	0	$+$	

• $B(x) = -4x - 11$. *Dans cette expression,* $\mathrm{m} = -4$ *et* $\mathrm{p} = -11$.

On calcule $-\frac{p}{m} = -\frac{-11}{-4} = -\frac{11}{4} = \mathbf{-2,75}$

Attention à ces trois signes −.

De plus, $m = -4$ est **négatif.**

On écrit donc « + » à gauche de −2,75 puis « − » à droite.

x	$-\infty$		$-2,75$		$+\infty$
$-4x-11$		$+$	0	$-$	

• $C(x) = x - 3{,}9$. *Dans cette expression,* $\mathrm{m} = 1$ *et* $\mathrm{p} = -3{,}9$.

On calcule $-\frac{p}{m} = -\frac{-3{,}9}{1} = \mathbf{3,9}$.

De plus, $m = 1$ est **positif.**

On écrit donc « − » à gauche de 3,9 puis « + » à droite.

x	$-\infty$		$3,9$		$+\infty$
$x-3,9$		$-$	0	$+$	

• $D(x) = -2(3x - 1) + 5x$. *Il faut d'abord développer et réduire cette expression.*

$D(x) = -2 \times 3x - (-2) \times 1 + 5x$

$D(x) = -6x + 2 + 5x$

$D(x) = -x + 2$. *Dans cette expression,* $\mathrm{m} = -1$ *et* $\mathrm{p} = 2$.

On calcule $-\frac{p}{m} = -\frac{2}{-1} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$

De plus, $m = -1$ est **négatif.**

On écrit donc « + » à gauche de 2 puis « − » à droite.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	

Quand l'expression est longue à écrire, on peut juste écrire son nom dans le tableau de signes, ici « D(x) ».

4c. Produits et quotients

Pour les produits et les quotients, on peut faire un tableau à plusieurs lignes et utiliser la règle des signes.

Exemple : Dresser les tableaux de signes de ces expressions.
Si ce sont des produits ou des quotients, utiliser un tableau à plusieurs lignes.
Dans le cas d'un **quotient**, indiquer par une **double barre** les **valeurs interdites** (on ne peut pas diviser par zéro !)

$A(x) = (2x+3)(x-7)$ $\qquad B(x) = \dfrac{6x+3}{-4x-1}$ $\qquad C(x) = 1{,}5x - 3(x-7)$ $\qquad D(x) = -2(-3x-5)(x+9)$

• $A(x) = (2x+3)(x-7)$

*On applique la méthode vue en **4a** ou la propriété vue en **4b** pour trouver les nombres qui annulent* $(2x+3)$ *et* $(x-7)$*. Ici, j'applique la méthode de l'inéquation, vue en **4a**.*

$$2x+3 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2x \geq -3$$
$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{-1,5}$$

$$x-7 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{7}$$

• *Dans* $(2x+3)$*,* $m = 2$ *est **positif**. On place donc des « + » **à droite** de* $-1,5$*.*
• *Dans* $(x-7)$*,* $m = 1$ *est **positif**. On place donc des « + » **à droite** de 7.*
On place des « − » là où on n'a pas placé de « + ».

x	$-\infty$		$-1,5$		7		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dans la dernière ligne, on applique la règle des signes, par exemple « moins fois moins égale plus ». Comme 0 multiplié par n'importe quel nombre donne 0, on place des 0 partout où des 0 ont été placés dans les lignes précédentes.

• $B(x) = \dfrac{6x+3}{-4x-1}$

Les règles des produits et quotients étant les mêmes, on applique la même méthode.

$$\begin{aligned} &6x+3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 6x \geq -3 \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{6} \\ &\Leftrightarrow x \geq \mathbf{-0,5} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &-4x-1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -4x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{-4} \\ &\Leftrightarrow x \leq \mathbf{-0,25} \end{aligned}$$

• *Dans* $(6x+3)$, *$m = 6$ est* ***positif*** *On place donc des « + »* ***à droite*** *de $-0,5$.*
• *Dans* $(-4x-1)$, *$m = 1$ est* ***négatif****. On place donc des « + »* ***à gauche*** *de $-0,25$.*
À propos, on fait aussi attention à placer les nombres $-0,5$ et $-0,25$ dans l'ordre croissant ($-0,5$ à gauche de $-0,25$, donc).

x	$-\infty$		$-0,5$		$-0,25$		$+\infty$
$6x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-4x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	

Dans la dernière ligne, on applique encore la règle des signes, mais attention : on ne peut pas diviser par 0, donc le dénominateur $(-4x-1)$ ne doit pas s'annuler.
On l'indique en plaçant une double barre devant le nombre qui annule $(-4x-1)$, c'est-à-dire $-0,25$.

• $C(x) = 1{,}5x - 3(x-7)$

Celui-là est un piège : il ne s'agit pas d'un produit, à cause de la soustraction entre 1,5x et le reste. Il faut donc développer et réduire.

$C(x) = 1{,}5x - 3(x-7)$
$C(x) = 1{,}5x - 3x + 21$
$C(x) = -1{,}5x + 21$

On retrouve une expression affine comme en ***4a*** *et* ***4b****, donc on applique la méthode de l'inéquation comme ci-dessous (ou la propriété* ***4b****, si on préfère).*

$$\begin{aligned} &-1{,}5x + 21 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -1{,}5x \geq -21 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{-21}{-1{,}5} \\ &\Leftrightarrow x \leq \mathbf{14} \end{aligned}$$

L'inéquation a changé de sens car on a divisé par $-1,5$, un nombre négatif.
On trouve que C(x) est positif pour x inférieur ou égal à $-1,4$. Dans le tableau, on écrit donc « + » dans la partie à gauche de $-1,4$, et « − » à droite de $-1,4$.

x	$-\infty$		14		$+\infty$
$-1,5x+21$		$+$	0	$-$	

• $D(x) = -2(-3x-5)(x+9)$

On applique la même méthode. On s'occupera plus tard du -2 devant les parenthèses (même si on pourrait aussi le distribuer).

$$-3x - 5 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow -3x \geq 5$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{-3}$$
$$\Leftrightarrow x \leq -\mathbf{\frac{5}{3}}$$

$$x + 9 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{-9}$$

• *Le $-\mathbf{2}$ devant la parenthèse est toujours négatif. On place des « $-$ » **partout**.*
• *Dans $(-3x-5)$, $m = -3$ est **négatif**. On place donc des « $+$ » **à gauche** de $-1,5$.*
• *Dans $(x+9)$, $m = 1$ est **positif**. On place donc des « $+$ » **à droite** de -9.*

x	$-\infty$		-9		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$-3x-5$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	