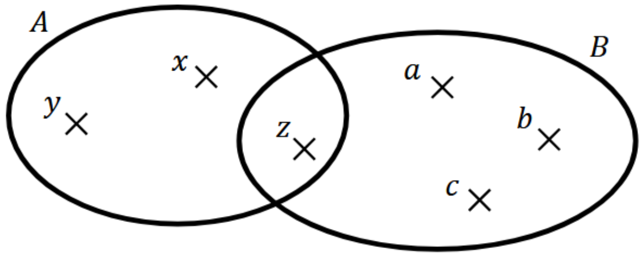
Chapitre 2 – Ensembles et intervalles

1. Ensembles

1a. Définition

Définition : Un **ensemble** est un regroupement d'éléments (nombres, points, issues d'une expérience aléatoire…). On les représente **entre accolades**.

Schémas



Notation mathématique

$A = \{x; y; z\}$
$B = \{a; b; c; z\}$

Définition : Si un élément fait partie d'un ensemble, on le note avec le symbole $\in$, qui se lit **« appartient à »**. Sinon, on note $\notin$ **« n'appartient pas à »**.

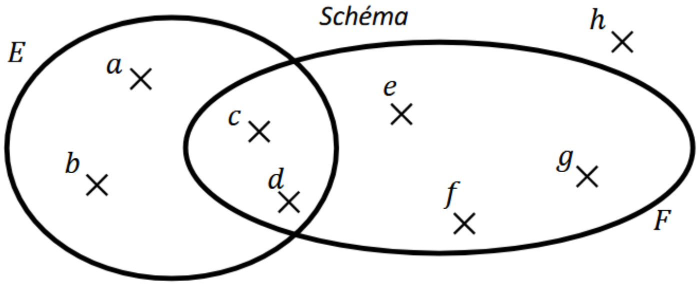
Exemple Compléter avec $\in$ ou $\notin$: y … A $\quad$ b … A $\quad$ z … B $\quad$ z … A $\quad$ x … B

$y \in A$; $b \notin A$; $z \in B$; $z \in A$; $x \notin B$

1b. Union et intersection

Définition : Soient deux ensembles A et B.
L'**intersection de A et B**, notée $\boldsymbol{A \cap B}$, « A inter B », représente les éléments qui sont **à la fois dans A et dans B**.
L'**union de A et B**, notée $\boldsymbol{A \cup B}$, « A union B », représente les éléments qui sont **soit dans A, soit dans B, soit dans les deux**. (On dit aussi « la réunion »).

Schéma



Notation mathématique

$E =$ ……………………………………

$F =$ ……………………………………

$E \cap F =$ ……………………………………

$E \cup F =$ ……………………………………

Définitions : - Soit A un ensemble et x tel que $x \in A$. On note $\boldsymbol{A \setminus \{x\}}$ **l'ensemble A privé de l'élément x**.
- Soient deux ensembles A et B. Si A est complètement **inclus dans B**, on note $\boldsymbol{A \subset B}$.

$\boldsymbol{E = \{a; b; c; d\}}$ et $\boldsymbol{F = \{c; d; e; f; g\}}$.
Donc $\boldsymbol{E \cap F = \{c; d\}}$. *C'est ce qui appartient à la fois à E et à F.*
$\boldsymbol{E \cup F = \{a; b; c; d; e; f; g\}}$. *C'est ce qui appartient soit à E, soit à F, soit aux deux.*
Notez que h n'appartient ni à E, ni à F, donc il n'appartient pas à $E \cup F$.

2. Ensembles de nombres

2a. Définition

Définitions :

L'ensemble $\mathbb{N}$ désigne les **nombres entiers naturels** (c'est-à-dire positifs) Exemples :

L'ensemble $\mathbb{Z}$ désigne les **nombres entiers relatifs** (c'est-à-dire positifs ou négatifs).

Exemples :

L'ensemble $\mathbb{D}$ désigne les **nombres décimaux** : ce sont ceux qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres. Ils n'ont pas d'infinité de chiffres après la virgule. Ils peuvent tous s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exemples :

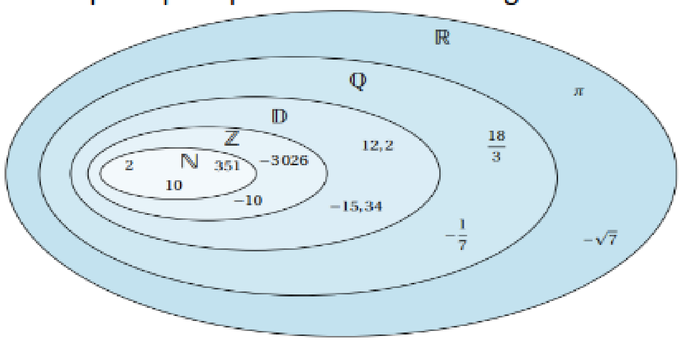
L'ensemble $\mathbb{Q}$ désigne les **nombres rationnels** : ce sont ceux qui peuvent s'écrire sous la forme d'une **fraction** de nombres entiers $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ non nul. Ils peuvent avoir une infinité de chiffres qui se répètent.

Exemples :

L'ensemble $\mathbb{R}$ désigne les **nombres réels** : ce sont tous les nombres qu'on peut placer sur une droite graduée.

Exemples :

Chaque ensemble est inclus dans le précédent :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Ainsi, un nombre décimal est aussi un nombre rationnel et un nombre réel.



• Exemples d'éléments de $\mathbb{N}$: **5 ; 17 ; 1 ; 2 000 ... et 0**, qui est aussi positif.

• Exemples d'éléments de $\mathbb{Z}$: $\mathbf{-3}$; $\mathbf{-91}$; $\mathbf{-1\,000\,000}$ ... mais aussi **5** ; **82** ou **0**, car les entiers positifs appartient à fois à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{Z}$.

• Exemples d'éléments de $\mathbb{D}$: $\mathbf{7,52}$; $\mathbf{-4,1}$; $\mathbf{102,003}$ ... mais aussi $\mathbf{-3}$ ou **82**, car les nombres entiers sont aussi des nombres décimaux. $\frac{1}{3}$
Notez que chaque décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. Par exemple, $7,52 = \frac{752}{100}$ et $-4,1 = \frac{-41}{10}$.

• Exemples d'éléments de $\mathbb{Q}$: $\mathbf{\frac{1}{3}} \approx 0,333\ldots$; $\mathbf{-\frac{9}{7}} \approx -1,29\ldots$ ou ; $\mathbf{\frac{125}{9}} \approx 13,88\ldots$ mais aussi **tous les éléments des ensembles précédents**.

• Exemples d'éléments de $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{\pi}$; $\mathbf{\sqrt{2}}$ ou $\mathbf{-\sqrt{7}}$: ils ont une infinité de chiffres après la virgule, mais qui ne se répètent pas. **Tous les éléments des ensembles précédents** appartiennent aussi à $\mathbb{R}$.

2b. Encadrements

Définitions :

• les puissances de 10 sont les nombres de la forme 10^n, où $n \in \mathbb{Z}$.

• pour n entier positif, encadrer un nombre à 10^{-n} près, c'est le placer entre deux nombres décimaux distants de 10^{-n}.

Exemple 1 Déterminer la valeur des puissances de 10 suivantes :

a. 10^4 **b.** 10^6 **c.** 10^1 **d.** 10^0 **e.** 10^{-3} **f.** 10^{-7}

Exemple 2 Pour chaque nombre proposé, donner l'encadrement demandé, puis une valeur approchée.

a. $\frac{4}{7}$ à 10^{-2} près. **b.** π à 10^{-4} près. **c.** $\sqrt{8}$ à 10^{-2} près. **d.** $-\frac{19}{13}$ à 10^{-3} près.

Exemple 1

a. $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = \mathbf{10\,000}$

b. $10^6 = \mathbf{1\,000\,000}$

c. $10^1 = \mathbf{10}$

d. $10^0 = \mathbf{1}$

e. $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = \mathbf{0{,}001}$

f. $10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \mathbf{0{,}000\,000\,1}$

Exemple 2

a. On calcule à la calculatrice : $\frac{4}{7} \approx 0{,}5714\ldots$

Donc un encadrement à 10^{-2} est : $\mathbf{0{,}57 < \frac{4}{7} < 0{,}58}$

Le chiffre après la virgule suivant étant un 1, l'arrondi est : $\frac{4}{7} \approx \mathbf{0{,}57}$

Cela signifie que placé sur une droite graduée, $\frac{4}{7}$ *est plus proche de* 0,57 *que de* 0,58.

b. On calcule à la calculatrice : $\pi \approx 3{,}14159\ldots$

Donc un encadrement à 10^{-4} est : $\mathbf{3{,}1415 < \pi < 3{,}1416}$

Le chiffre après la virgule suivant étant un 9, l'arrondi est : $\pi \approx \mathbf{3{,}1416}$

c. On calcule à la calculatrice : $\sqrt{8} \approx 2{,}828\ldots$

Donc un encadrement à 10^{-2} est : $\mathbf{2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83}$

Le chiffre après la virgule suivant étant un 8, l'arrondi est : $\sqrt{8} \approx \mathbf{2{,}83}$

d. On calcule à la calculatrice : $-\frac{19}{13} \approx -1{,}4615\ldots$

Donc un encadrement à 10^{-3} est : $\mathbf{-1{,}462 < -\frac{19}{13} < -1{,}461}$

On fait attention : dans les nombres négatifs, l'ordre est inversé.

Le chiffre après la virgule suivant étant un 5, l'arrondi est : $-\frac{19}{13} \approx \mathbf{-1{,}462}$

2c. Démonstrations

Propriété : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (on dit qu'il est irrationnel).

Démonstration :

C'est une démonstration « par l'absurde » : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, mais nous allons aboutir à une contradiction. Cela prouvera que $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.

• Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.

Il existe alors deux nombres entiers a et b, avec b non nul, tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

On peut alors supposer que $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible.

• Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, alors par produit en croix, $\sqrt{2} \times b = a$.

On met alors cette égalité au carré pour obtenir $2b^2 = a^2$.

Ainsi, a^2 est un multiple de 2 : c'est un nombre pair. On en déduit que a est également un nombre pair.

• Par conséquent, il existe un entier k, tel que $a = 2k$.

Or on avait obtenu l'égalité $2b^2 = a^2$, soit $2b^2 = (2k)^2 = 2^2 \times k^2 = 4k^2$

Comme $2b^2 = 4k^2$, on a alors $b^2 = 2k^2$.

Donc b^2 est également pair, de même que b.

• Finalement, on a démontré que a et b sont tous les deux des nombres pairs. Or on avait supposé que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, mais elle pourrait être simplifiée par 2. C'est une contradiction.

Ainsi, ce qu'on avait supposé au début est faux : $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.

Propriété : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration : Supposons, par l'absurde, que $\frac{1}{3}$ soit décimal.

On peut alors l'écrire comme une fraction décimale : $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Par produit en croix, on trouve alors que $10^n = 3 \times a$, c'est-à-dire que 10^n est un multiple de 3.

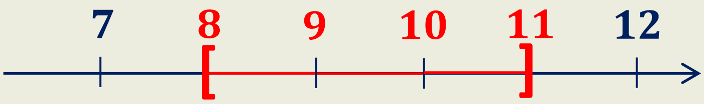
Or 10^n est constitué d'un chiffre 1, puis uniquement des zéros. La somme de ses chiffres est 1. Ce n'est donc pas un multiple de 3.

On aboutit à une contradiction. Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

3. Intervalles

3a. Définition

Soient deux nombres réels a et b. L'ensemble des nombres réels compris entre a et b (inclus) est appelé un intervalle et se note $[a; b]$.
a et b sont appelés les bornes de l'intervalle.



$[8; 11]$ contient tous les réels compris entre 8 et 11 inclus, c'est-à-dire une infinité de nombres.

Remarque : Ne pas confondre [et {.
[1 ; 5] contient tous les nombres réels compris entre 1 et 5.
{1 ; 5} contient juste deux nombres : 1 et 5.

Exemple 1 Compléter avec le symbole ∈ (appartient à) ou ∉ (n'appartient pas à). *Si nécessaire, justifier ci-après.*

$\boldsymbol{a}.\ 5$	$[1; 6]$	$\boldsymbol{b}.\ 21$	$[22{,}3; 29]$	$\boldsymbol{c}.\ -3$	$[-7; -4]$
$\boldsymbol{d}.\ -10$	$[-50; -1]$	$\boldsymbol{e}.\ 0{,}4$	$\{0{,}37; 0{,}5\}$	$\boldsymbol{f}.\ \frac{5}{14}$	$[\frac{1}{7}\,;\,\frac{3}{7}]$
$\boldsymbol{g}.\ 7$	$[7; 10]$	$\boldsymbol{h}.\ \sqrt{2}$	$[1; 2]$	$\boldsymbol{i}.\ \pi$	$[2; 3]$
$\boldsymbol{j}.\ -0{,}13$	$[-0{,}2; -0{,}1]$	$\boldsymbol{k}.\ \frac{7}{3}$	$[1; \sqrt{5}]$	$\boldsymbol{l}.\ 0$	$[-4; 1]$

Exemple 2 Placer chaque nombre dans un intervalle d'amplitude 0,1.

$5{,}36 \in$ $\qquad$ $\frac{11}{7} \in$ $\qquad$ $\sqrt{40} \in$ $\qquad$ $5\pi \in$

Exemple 1

a. $5 \in [1; 6]$

b. $21 \notin [22{,}3; 29]$

c. $-3 \notin [-7; -4]$

d. $-10 \in [-50; -1]$

e. $0{,}4 \notin \{0{,}37; 0{,}5\}$
En l'absence de crochets, il s'agit de l'ensemble qui ne contient que 0,37 *et* 0,5.

f. $\frac{5}{14} \in \left[\frac{1}{7}; \frac{3}{7}\right]$
car $\frac{1}{7} = \frac{2}{14}$ et $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$

g. $7 \in [7; 10]$
car les bornes de cet intervalle sont incluses.

h. $\sqrt{2} \in [1; 2]$
car $\sqrt{2} \approx 1{,}4$

i. $\pi \notin [2; 3]$
car $\pi \approx 3{,}14$

j. $-0{,}13 \in [-0{,}2; -0{,}1]$

k. $\frac{7}{3} \in [1; \sqrt{5}\,]$
car $\frac{7}{3} \approx 2{,}33$ et $\sqrt{5} \approx 2{,}24$

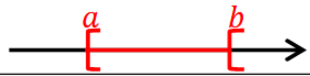
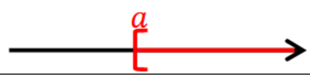
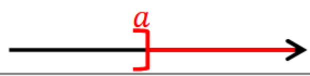
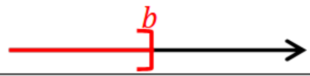
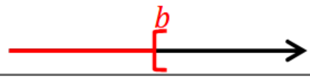
l. $0 \in [-4; 1]$

Exemple 2 *Comme en **2b**, on calcule des valeurs approchées, puis on encadre.*

$5{,}36 \in [\mathbf{5{,}3}; \mathbf{5{,}4}]$ $\qquad$ $\frac{11}{7} \in [\mathbf{1{,}5}; \mathbf{1{,}6}]$ $\qquad$ $\sqrt{40} \in [\mathbf{6{,}3}; \mathbf{6{,}4}]$ $\qquad$ $5\pi \in [\mathbf{15{,}7}; \mathbf{15{,}8}]$

3b. Intervalles ouverts

Dans un intervalle, le sens du crochet permet de dire si le nombre est inclus ou exclu.

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leq x \leq b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a; b]$	
$a < x \leq b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in]a; b]$	
$a \leq x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a; b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in]a; b[$	
$a \leq x$	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a; +\infty[$	
$a < x$	x est strictement supérieur à a	$x \in]a; +\infty[$	
$x \leq b$	x est inférieur ou égal à b	$x \in]-\infty; b]$	
$x < b$	x est strictement inférieur à b	$x \in]-\infty; b[$	

Exemple 1 Compléter avec le symbole ∈ (appartient à) ou ∉ (n'appartient pas à).

$\boldsymbol{a}.$ 4 $[4; 7[$ $\boldsymbol{b}.$ 7 $[4; 7[$ $\boldsymbol{c}.$ -1 $]-5; -1]$

$\boldsymbol{d}.$ 5 $[3; +\infty[$ $\boldsymbol{e}.$ -61 $]-\infty; 2[$ $\boldsymbol{f}.$ $\frac{2}{7}$ $]-\frac{1}{7}; \frac{3}{14}]$

$\boldsymbol{g}.$ $9{,}9$ $]-\infty; 10[$ $\boldsymbol{h}.$ 5 $]5{,}01; 7]$ $\boldsymbol{i}.$ π $]3{,}14, +\infty[$

Exemple 2 Représenter les intervalles suivants sur une droite graduée.

a. $[-2; 5[$ **b.** $]-\infty; -4[$ **c.** $[5; +\infty[$ **d.** $]1; 7]$

Exemple 3 Décrire, à l'aide d'un intervalle, les ensembles correspondant aux nombres x tels que :

a. $1 \leq x < 5$ **b.** $-3 < x < 2$ **c.** $x \leq -7$ **d.** $-1 \leq x$ **e.** $3 > x$

Exemple 1

a. $4 \in [4; 7[$
Ici, 4 est inclus dans l'intervalle.

b. $7 \notin [4; 7[$
Par contre, 7 est exclu.

c. $-1 \in]-5; -1]$

d. $5 \in [3; +\infty[$
5 est plus grand que 3.

e. $-61 \in]-\infty; 2[$
-61 est plus petit que 2.

f. $\frac{2}{7} \notin]-\frac{1}{7}; \frac{3}{14}]$
car $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$

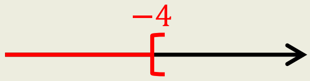
g. $9{,}9 \in]-\infty ; 10[$
9,9 est bien strictement inférieur à 10.

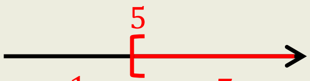
h. $5 \notin]5{,}01 ; 7]$
Ce n'est pas à cause du crochet : 5 est inférieur à 5,01.

i. $\pi \in]3{,}14 ; +\infty[$
car π est strictement supérieur (de très peu, certes) à 3,14.

Exemple 2
On place bien les mêmes crochets sur la droite que sur l'intervalle.
On ne représente pas ∞ (ni le crochet associé) sur la droite.

a. $[-2 ; 5[$ 

b. $]-\infty ; -4[$ 

c. $[5 ; +\infty[$ 

d. $]1 ; 7]$ 

Exemple 3
On peut éventuellement tracer une droite graduée comme dans l'exemple 2 avant de déterminer l'intervalle.

a. $1 \leq x < 5$ correspond à $[\mathbf{1} ; \mathbf{5}[$
b. $-3 < x < 2$ correspond à $]-\mathbf{3} ; \mathbf{2}[$
c. $x \leq -7$ correspond à $]-\infty ; -\mathbf{7}]$
d. $-1 \leq x$ correspond à $[-\mathbf{1} ; +\infty[$
e. $3 > x$ correspond à $]-\infty ; \mathbf{3}[$ *Penser « x est strictement inférieur à 3 ».*

3c. Union et intersection

On peut construire d'autres ensembles avec ∩ et ∪.

Exemple 1 en prenant $I = [0; 12]$ et $J = [3; 20]$

• **l'intersection de I et J** est $I \cap J =$

(c'est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I et à J, ici l'endroit où se superposent le bleu et le rouge)

• **la réunion de I et J** est $I \cup J =$

(c'est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J, ici l'endroit où l'on a de la couleur)

Exemple 2 Dans chaque cas, représenter les intervalles sur une droite graduée, puis déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

a. $I = [-4; 5]$ et $J = [0; 10]$ **b.** $I =]0; 5]$ et $J = [-2; 3]$ **c.** $I = [0; 4]$ et $J = [6; 8[$

d. $I = [0; +\infty[$ et $J =]-\infty; 2[$ **e.** $I = [-5; -4[$ et $J =]-\infty; 3]$

Exemple 1

$I \cap J = [\mathbf{3}; \mathbf{12}]$ et $I \cup J = [\mathbf{0}; \mathbf{20}]$

Exemple 2

a. $I \cap J = [\mathbf{0}\,; \mathbf{5}]$ et $I \cup J = [-\mathbf{4}\,; \mathbf{10}]$

b. $I \cap J =]\mathbf{0}\,; \mathbf{3}]$ et $I \cup J = [-\mathbf{2}\,; \mathbf{5}]$

c. $I \cap J = \emptyset$ *, c'est l'ensemble vide, car les deux intervalles n'ont aucun nombre en commun. Ainsi, la seule façon de décrire l'union est* $I \cup J = [\mathbf{0}\,; \mathbf{4}] \cup [\mathbf{6}\,; \mathbf{8}[$

d. $I \cap J = [\mathbf{0}\,; \mathbf{2}[$ et $I \cup J =]-\infty\,; +\infty[$ *, c'est-à-dire* $\mathbb{R}$.

e. $I \cap J = [-\mathbf{5}\,; -\mathbf{4}[$ et $I \cup J =]-\infty; \mathbf{3}]$

En fait, I est inclus dans J, c'est pourquoi $I \cap J = I$ et $I \cup J = J$.

4. Valeur absolue

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est égale à x si $x \geq 0$, et $-x$ si $x < 0$.
Autrement dit, la valeur absolue « transforme » un nombre en nombre positif.

Exemples : $|-3| = 3$ $|7| = 7$ $|-4{,}1| = 4{,}1$ $|0| = 0$

Propriété : Pour x réel, on a $|x| = \sqrt{x^2}$

Définition : La distance entre deux nombres réels a et b est $|b - a|$.

Propriété : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.
L'intervalle $[a - r; a + r]$ représente tous les nombres qui sont à une distance de a inférieure ou égale à r :

$$x \in [a - r; a + r] \text{ si et seulement si } |x - a| \leq r$$

r est alors appelé le rayon de l'intervalle.