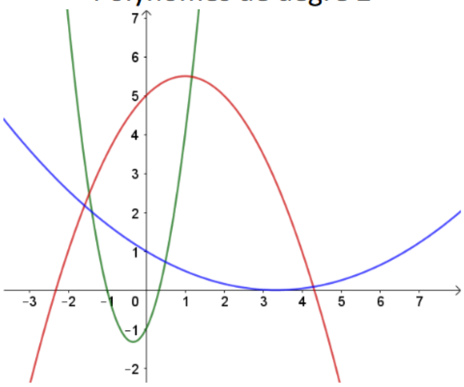
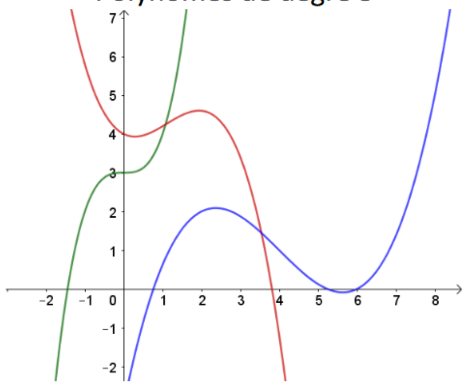
Chapitre 5 – Polynômes

Les **polynômes** sont une catégorie de fonctions qui ont des points communs assez simples à étudier, et qui correspondent à plusieurs phénomènes vus en physique ou en économie.

Polynômes de degré 2



Polynômes de degré 3

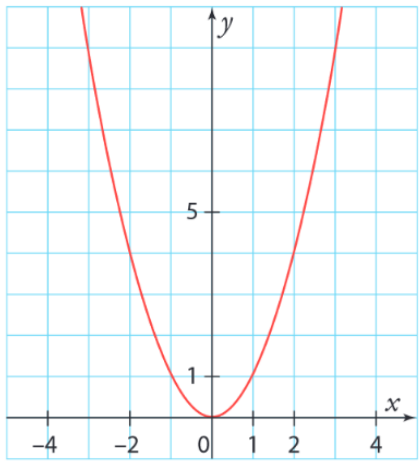


1. Polynômes $ax^2 + c$

1a. Fonction carré

La fonction carré est définie par $f(x) = x^2$.
En voici quelques valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							



La forme de sa courbe s'appelle une **parabole**.

Elle ne prend que des **valeurs positives**.
Ainsi, un nombre négatif n'a pas d'antécédent par la fonction carré : la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de f(x)		

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		

On calcule le carré de chaque antécédent du tableau :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**

On observe la courbe pour dresser les tableaux de signes & variations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

1b. Définition

Un polynôme du 2nd degré est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

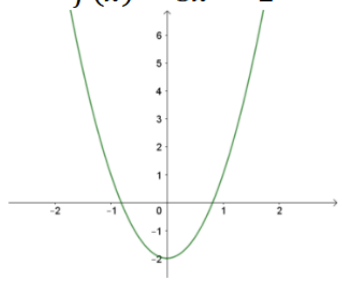
où a, b et c sont des réels, et a est non nul.

Exemple 1 On considère le polynôme défini par $f(x) = -2x^2 + 5$.

a. Donner les valeurs de a, b et c. **b.** Calculer $f(10)$ et $f(-4)$.

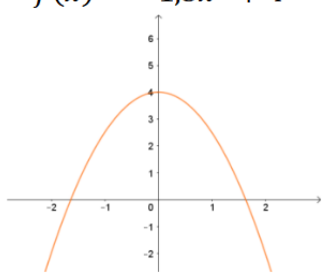
Exemple 2 Dans chaque cas, identifier les valeurs de a et c. Observer le rapport entre a et c, et la courbe.

$f(x) = 3x^2 - 2$



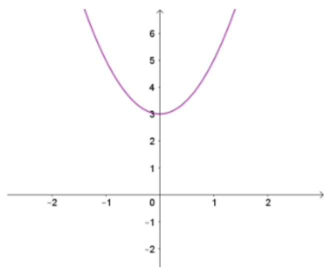
$a =$ $c =$

$f(x) = -1{,}5x^2 + 4$



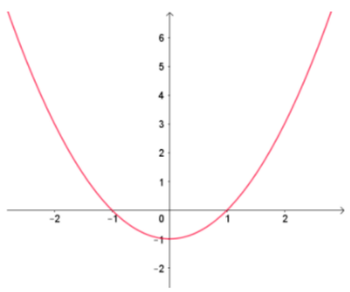
$a =$ $c =$

$f(x) = 2x^2 + 3$



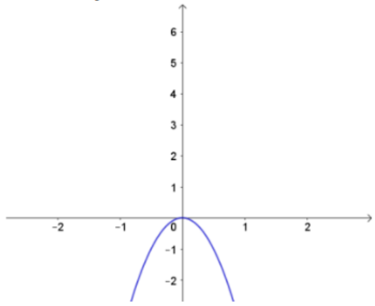
$a =$ $c =$

$f(x) = x^2 - 1$



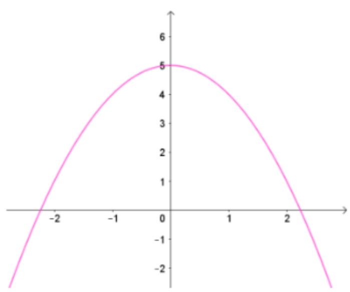
$a =$ $c =$

$f(x) = -4x^2$



$a =$ $c =$

$f(x) = -x^2 + 5$



$a =$ $c =$

Exemple 1

a. Le coefficient en x^2 est $\boldsymbol{a = -2}$. Il n'y a pas de coefficient en x, donc $\boldsymbol{b = 0}$.
Le terme constant, qui n'est pas multiplié par x est $\boldsymbol{c = 5}$.

b. *Ne pas oublier que le carré est prioritaire sur la multiplication.*

$f(10) = -2 \times 10^2 + 5 = -2 \times 100 + 5 = -200 + 5 = \mathbf{-195}$

$f(-4) = -2 \times (-4)^2 + 5 = -2 \times 16 + 5 = -32 + 5 = \mathbf{-27}$

Exemple 2

- pour $f(x) = 3x^2 - 2$, $\boldsymbol{a = 3}$ et $\boldsymbol{c = -2}$
- pour $f(x) = -1{,}5x^2 + 4$, $\boldsymbol{a = -1,5}$ et $\boldsymbol{c = 4}$
- pour $f(x) = 2x^2 + 3$, $\boldsymbol{a = 2}$ et $\boldsymbol{c = 3}$
- pour $f(x) = x^2 - 1$, $\boldsymbol{a = 1}$ et $\boldsymbol{c = -1}$
- pour $f(x) = -4x^2$, $\boldsymbol{a = -4}$ et $\boldsymbol{c = 0}$
- pour $f(x) = -x^2 + 5$, $\boldsymbol{a = -1}$ et $\boldsymbol{c = 5}$

On remarque que quand a est positif, la courbe est tournée vers le haut. Quand a est négatif, la courbe est tournée vers le bas.
Le c joue le même rôle que l'ordonnée à l'origine des fonctions affines.

1c. Variations

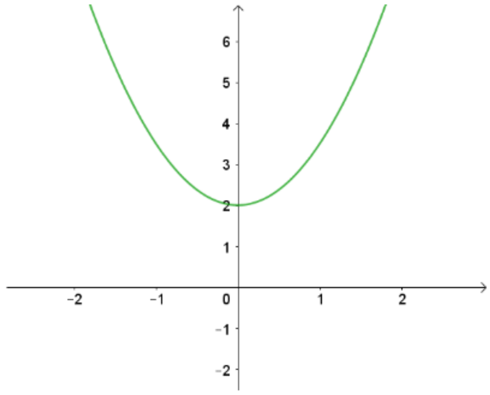
La courbe d'un polynôme s'appelle une parabole. Son sens de variation est donné par le signe de a.

Pour un polynôme $ax^2 + c$, le **sommet** de la parabole est le **point de coordonnées** $(\mathbf{0}; \boldsymbol{c})$

Si $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, la parabole est « **tournée vers le haut** », en forme de « U ».
Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	c	↗	

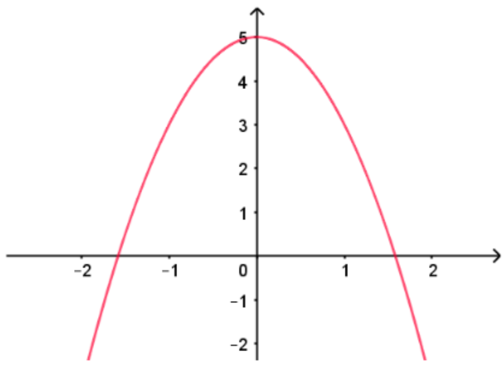
$f(x) = 1{,}5x^2 + 2$



Si $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, la parabole est « **tournée vers le bas** » , en forme de « cloche ».
Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	c	↘	

$g(x) = -2x^2 + 5$



L'axe de symétrie de la courbe est **l'axe des ordonnées.**

Exemple : Dresser le tableau de variations de $f(x) = -3x^2 + 7$ et $g(x) = x^2 - 15{,}1$.

Pour $f(x) = -3x^2 + 7$, $a = -3$ est négatif donc la courbe est tournée vers le bas, en forme de « cloche ». Les coordonnées du sommet sont $(0; 7)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	7	↘	

Pour $g(x) = x^2 - 15{,}1$, $a = 1$ est positif donc la courbe est tournée vers le haut, en forme de « U ». Les coordonnées du sommet sont $(0; -15{,}1)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		↘	$-15,1$	↗	

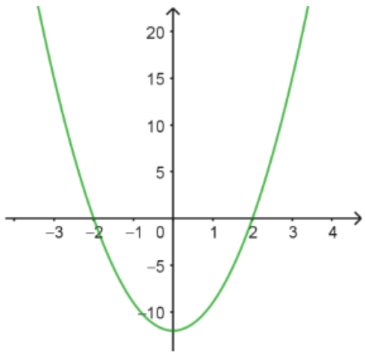
1d. Signe et racines

Une racine est un antécédent de 0.
Autrement dit, c'est un nombre noté x_1 ou x_2 tel que $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Propriété : les polynômes de forme $ax^2 + c$ admettent deux racines si et seulement si a et c sont de signes différents.

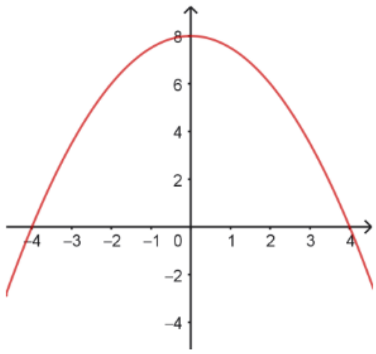
Exemple 1 Dans chaque cas, indiquer la valeur des racines x_1 et x_2, si elles existent.

$f(x) = 3x^2 - 12$



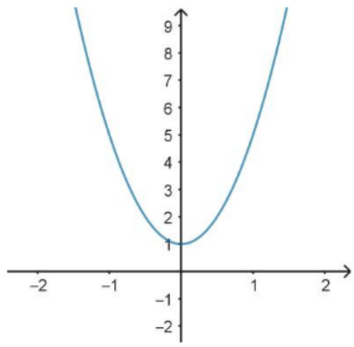
$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

$g(x) = -0{,}5x^2 + 8$



$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

$h(x) = 4x^2 + 1$



$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

Exemple 2 Déterminer par le calcul les racines des polynômes suivants, si elles existent.

$f(x) = -4x^2 + 36$ $\qquad$ $g(x) = 7x^2 + 14$ $\qquad$ $h(x) = 2x^2 - 60$

Exemple 1 *On lit sur le graphique les antécédents de 0, c'est-à-dire les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.*

• pour $f(x) = 3x^2 - 12$, $\qquad$ $\boldsymbol{x_1 = -2}$ et $\boldsymbol{x_2 = 2}$

L'ordre des racines x_1 *et* x_2 *n'a pas d'importance.*

• pour $g(x) = -0{,}5x^2 + 8$, $\qquad$ $\boldsymbol{x_1 = -4}$ et $\boldsymbol{x_2 = 4}$

• pour $h(x) = 4x^2 + 1$, la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses. Il n'y a donc **pas de racines** x_1 et x_2.

Exemple 2 *Chercher une racine revient à résoudre l'équation* $\mathrm{f(x)} = 0$.

$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow -4x^2 + 36 = 0$
$\Leftrightarrow -4x^2 = -36$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-36}{-4}$
$\Leftrightarrow x^2 = 9$
Or $\sqrt{9} = 3$, donc **les racines de $\boldsymbol{f}$ sont $\boldsymbol{x_1 = 3}$ et $\boldsymbol{x_2 = -3}$.**

$g(x) = 0$
$\Leftrightarrow 7x^2 + 14 = 0$
$\Leftrightarrow 7x^2 = -14$
$\Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{14}{7}$
$\Leftrightarrow x^2 = -2$
Or un carré ne peut pas être négatif, donc **$\boldsymbol{g}$ n'a pas de racines.**

$h(x) = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 60 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 = 60$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{60}{2}$
$\Leftrightarrow x^2 = 30$
30 n'est pas un carré parfait.
Les racines de $\boldsymbol{h}$ sont $\boldsymbol{x_1 = \sqrt{30}}$ et $\boldsymbol{x_2 = -\sqrt{30}}$.

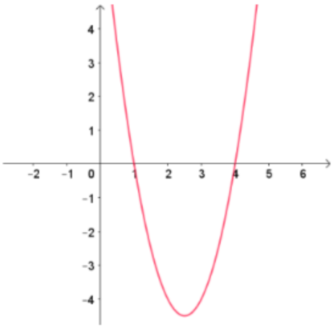
2. Polynômes factorisés

2a. Propriété

Un polynôme dont les racines sont les nombres x_1 et x_2 peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

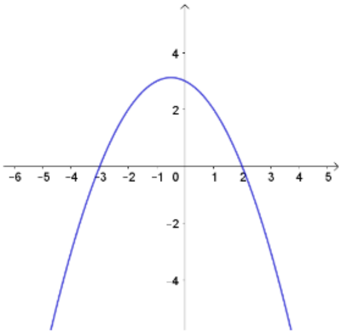
Exemple 1 Dans chaque cas, donner les valeurs de a, x_1 et x_2.

$f(x) = 2(x-1)(x-4)$



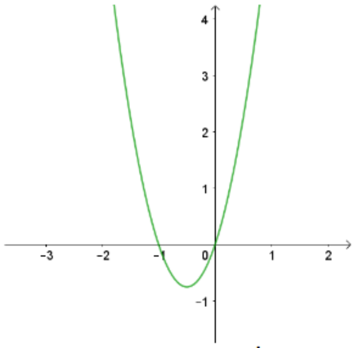
$a =$ $x_1 =$ et $x_2 =$

$g(x) = -1{,}5(x-2)(x+3)$



$a =$ $x_1 =$ et $x_2 =$

$h(x) = 3x(x+1)$



$a =$ $x_1 =$ et $x_2 =$

Exemple 2 Soit f un polynôme défini par $f(x) = -2x^2 - 4x + 30$

a. Vérifier que 3 et -5 sont racines de f. **b.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2(x-3)(x+5)$.

Exemple 1

• pour $f(x) = 2(x-1)(x-4)$ $\quad \boldsymbol{a = 2} \quad \boldsymbol{x_1 = 1}$ et $\boldsymbol{x_2 = 4}$

On voit d'ailleurs sur la courbe que les racines sont bien 1 *et* 4.

• pour $g(x) = -1{,}5(x-2)(x+3)$ $\quad \boldsymbol{a = -1{,}5} \quad \boldsymbol{x_1 = 2}$ et $\boldsymbol{x_2 = -3}$

La parenthèse $(\mathrm{x}+3)$ *peut se réécrire* $(\mathrm{x}-(-3))$ *et le* -3 *correspond alors à* x_2.

• pour $h(x) = 3x(x+1)$ $\quad \boldsymbol{a = 3} \quad \boldsymbol{x_1 = 0}$ et $\boldsymbol{x_2 = -1}$

Exemple 2

a. *Une racine, c'est un antécédent de 0. Il faut donc vérifier que* $\mathrm{f}(3)$ *et* $\mathrm{f}(-5)$ *sont égaux à 0.*

$f(3) = -2 \times 3^2 - 4 \times 3 + 30 = -2 \times 9 - 12 + 30 = -18 - 12 + 30 = \mathbf{0}$

$f(-5) = -2 \times (-5)^2 - 4 \times (-5) + 30 = -2 \times 25 + 20 + 30 = \mathbf{0}$

3 et -5 sont donc bien les racines de f.

b. *Le plus simple est de développer l'expression proposée, pour retomber sur* $\mathrm{f(x)}$.

$-2(x-3)(x+5)$ *On distribue d'abord le* -2 *à la parenthèse* $(\mathrm{x}-3)$.

$= (-2 \times x - 2 \times (-3))(x+5)$

$= (-2x+6)(x+5)$

$= -2x \times x - 2x \times 5 + 6 \times x + 6 \times 5$

$= -2x^2 - 10x + 6x + 30$

$= \boldsymbol{-2x^2 - 4x + 30}$

On retrouve bien l'expression de $f(x)$. Donc $f(x) = -2(x-3)(x+5)$.

2b. Variations

À nouveau, le sens de variation est donné par le signe de a.

L'abscisse du sommet de la courbe est la moyenne des racines :

$$s = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

L'extremum de la fonction (minimum ou maximum) est $f(s)$.

Soit un polynôme $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$.

On considère aussi $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{x_1 + x_2}}{\boldsymbol{2}}$ la **moyenne des racines**.

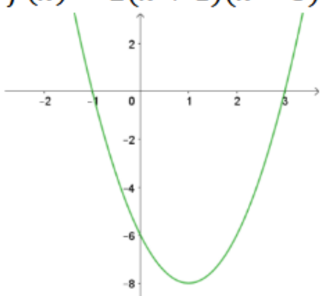
Si $\boldsymbol{a > 0}$, sa courbe est « **tournée vers le haut** » en forme de « U ».
Le tableau de variation est :

x	$-\infty$	s	$+\infty$
f	↘	$f(s)$	↗

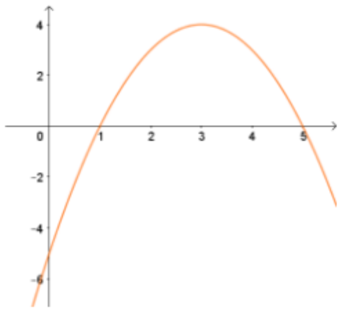
Si $\boldsymbol{a < 0}$, sa courbe est « **tournée vers le bas** », en forme de « cloche ».
Le tableau de variation est :

x	$-\infty$	s	$+\infty$
f	↗	$f(s)$	↘

$f(x) = 2(x+1)(x-3)$



$g(x) = -(x-1)(x-5)$



Exemple 1 Pour chacune des fonctions f et g ci-contre :
- donner les racines du polynôme,
- placer le sommet puis tracer l'axe de symétrie,
- tracer le tableau de variations.

Exemple 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -8(x - 21{,}5)(x - 7{,}5)$.
On suppose que cette fonction modélise sur l'intervalle $[9; 21]$ le nombre de visiteurs présents dans un parc d'attractions ouvert de 9h à 21h. Pour x compris entre 9 et 21, $f(x)$ est donc le nombre de visiteurs présents dans le parc à l'instant x.

a. Quelles sont les racines de f ?

b. Déterminer l'heure à laquelle le nombre de visiteurs est maximal. Quel est ce maximum ?

Exemple 1

- pour $f(x) = 2(x+1)(x-3)$

Les racines sont $\mathbf{-1}$ **et** $\mathbf{3}$, comme on peut le voir dans l'expression et la courbe.

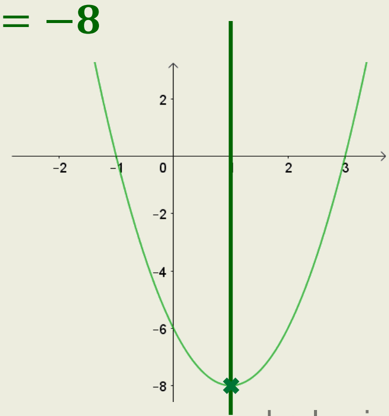
Le sommet a pour abscisse $s = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$

et pour ordonnée $f(1) = 2(1+1)(1-3) = 2 \times 2 \times (-2) = \mathbf{-8}$

On peut donc tracer l'axe de symétrie.

$\boldsymbol{a = 2}$ **est positif**, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	-8	↗



• pour $g(x) = -(x-1)(x-5)$

Les racines sont **1 et 5**.

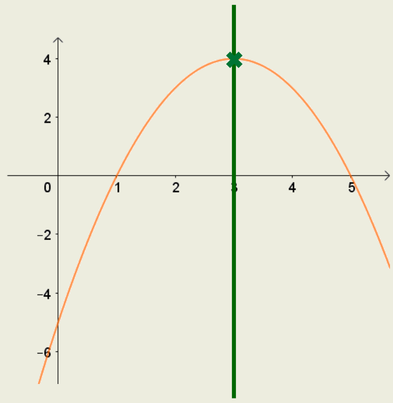
Le sommet a pour abscisse $s = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$

et pour ordonnée $g(3) = -(3-1)(3-5) = -2 \times (-2) = \mathbf{4}$

On peut donc tracer l'axe de symétrie.

$\boldsymbol{a = -1}$ **est négatif**, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
g		$\nearrow$	4	$\searrow$	



Exemple 2

a. L'expression $f(x) = -8(x - 21{,}5)(x - 7{,}5)$ nous indique que les racines sont $\mathbf{21,5}$ et $\mathbf{7,5}$.

b. Dressons le tableau de variations de f.

Le sommet a pour abscisse $s = \frac{21{,}5+7{,}5}{2} = \frac{29}{2} = \mathbf{14,5}$

et ordonnée $f(14{,}5) = -8(14{,}5 - 21{,}5)(14{,}5 - 7{,}5) = -8 \times (-7) \times 7 = \mathbf{392}$

$\boldsymbol{a = -8}$ **est négatif**, donc le tableau de variations est :

x	9		$14,5$		21
f		$\nearrow$	392	$\searrow$	

Ainsi, le nombre de visiteurs est maximal à **14h30** et ce maximum est **392**.

2c. Signe

Le signe de a et les racines permettent de dresser le tableau de signes.

Soit un polynôme $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$.

Si $\boldsymbol{a > 0}$, le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $\boldsymbol{a < 0}$, le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut retenir que dans le tableau de signes d'un polynôme, **le signe de a est toujours à l'extérieur**.

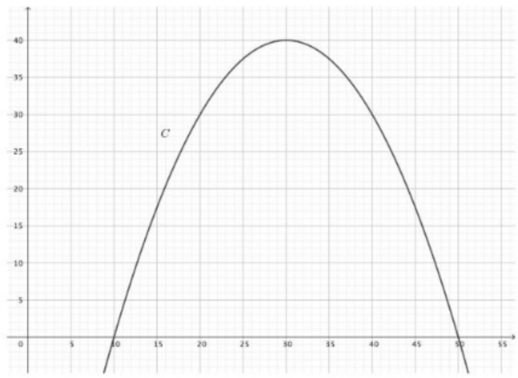
Exemple 1 Dresser les tableaux de signes des polynômes suivants :

$$f(x) = 2(x - 2)(x - 7) \qquad g(x) = -4(x + 1)(x - 8)$$

Exemple 2 On considère la fonction f définie sur $[0; 60]$ par

$$f(x) = -0{,}1x^2 + 6x - 50$$

La fonction f représente le résultat (en million d'euros) que réalise une entreprise pour la fabrication de x millions de jouets. La représentation graphique C de la fonction f est tracée ci-contre.



a. Démontrer que pour tout $x \in [0; 60]$:

$$f(x) = -0{,}1(x - 10)(x - 50)$$

b. En déduire les racines, le tableau de signes et le tableau de variations de f.

c. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$. Interpréter le résultat.

Exemple 1

• $f(x) = 2(x - 2)(x - 7)$.
Les racines sont **2 et 7**. a est **positif**.
Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• $g(x) = -4(x + 1)(x - 8)$.
Les racines sont $\boldsymbol{-1}$ **et 8**. a est **négatif**.
Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-1		8		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple 2

a. On développe l'expression proposée par la question.

$-0{,}1(x - 10)(x - 50)$
$= (-0{,}1x + 1)(x - 50)$
$= -0{,}1x \times x - 0{,}1x \times (-50) + 1 \times x + 1 \times (-50)$
$= -0{,}1x^2 + 5x + x - 50$
$= -0{,}1x^2 + 6x - 50$

On retrouve bien l'expression de $f(x)$.

b. D'après la question **a**, les racines sont donc **10 et 50**, avec $a = -0{,}1$ qui est **négatif**.
On peut en déduire le tableau de signes :

x	$-\infty$		10		50		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour les variations, on calcule l'abscisse du sommet : $s = \frac{10+50}{2} = \frac{60}{2} = \mathbf{30}$
et l'ordonnée $f(30) = -0{,}1(30-10)(30-50) = -0{,}1 \times 20 \times (-20) = \mathbf{40}$
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		30		$+\infty$
f		$\nearrow$	40	$\searrow$	

c. D'après le tableau de signes, $f(x) > 0$ pour $x \in]\mathbf{10};\mathbf{50}[$.
Cela signifie que l'entreprise ne dégage un bénéfice que lorsqu'elle fabrique entre 10 et 50 million de jouets.

2d. Factorisation

En connaissant une racine, on peut déterminer la forme factorisée d'un polynôme.

Exemple

Une styliste fabrique des casquettes qu'elle met en vente. On suppose que toutes les casquettes fabriquées sont vendues. La styliste effectue une étude sur la production d'un nombre de casquettes compris entre 0 et 60. Elle estime que le coût de production en euros de x casquettes est modélisé par la fonction C dont l'expression est : $C(x) = x^2 - 10x + 500$, où x appartient à l'intervalle $[0; 60]$.

Chaque casquette est vendue 50 euros pièce.

On note $R(x)$ le chiffre d'affaires en euros obtenu pour la vente de x casquettes, c'est-à-dire le montant de la vente de x casquettes.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 60]$, on pose $D(x) = R(x) - C(x)$

- **a.** Montrer que $D(x) = -x^2 + 60x - 500$
- **b.** Calculer $D(10)$.
- **c.** En déduire une factorisation de $D(x)$.

1. La styliste obtient 50€ par casquette vendue, donc pour x casquettes,
$\boldsymbol{R(x) = 50x}$.

2a. D'après l'énoncé,

$$D(x) = R(x) - C(x)$$
$$D(x) = 50x - (x^2 - 10x + 500)$$
$$D(x) = 50x - x^2 + 10x - 500$$
$$D(x) = \boldsymbol{-x^2 + 60x - 500}$$

On trouve bien l'expression demandée.

2b. $D(10) = -10^2 + 60 \times 10 - 500 = -100 + 600 - 500 = \mathbf{0}$

On a trouvé que 10 est une racine de D.

2c. On sait que $x_1 = 10$ et que $a = -1$.

Pour avoir la factorisation, il reste à trouver l'autre racine x_2.

$D(x)$ est de la forme $-(x - 10)(x - x_2)$. On développe cette expression en sachant qu'elle doit être égale à l'expression trouvée en **2a** : $-x^2 + 60x - 500$.

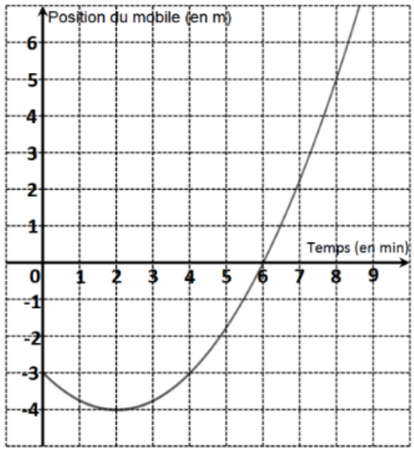
$$-(x - 10)(x - x_2)$$
$$= (-x + 10)(x - x_2)$$
$$= -x \times x - x \times (-x_2) + 10 \times x + 10 \times (-x_2)$$
$$= -x^2 + x_2 x + 10x - 10x_2$$

Or le terme constant de cette expression, $-10x_2$, doit être égal à -500.

La seule possibilité est que $\boldsymbol{x_2 = 50}$.

Ainsi, $\boldsymbol{D(x) = -(x - 10)(x - 50)}$.

2e. Modélisations



Exemple 1 Un mobile se déplace sur une droite graduée en mètre. Son abscisse $p(t)$ sur cette droite graduée (exprimée en mètre) en fonction du temps écoulé t (exprimé en minute) depuis le départ est donnée par :

$$p(t) = 0{,}25t^2 - t - 3$$

1. Quelle est la position du mobile à $t = 0$ min puis à $t = 2$ min ?

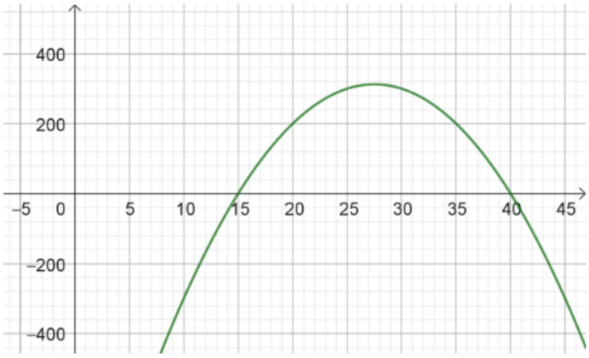
2. La courbe représentative de la fonction p est tracée ci-contre.

a. Déterminer à quel(s) instant(s) le mobile est à la position -3.

b. Quelle est la vitesse moyenne du mobile entre $t = 6$ min et $t = 8$ min ?

3. a. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $p(t) = 0{,}25(t-6)(t+2)$.

b. À l'aide du tableau de signes de p sur $[0; +\infty[$, déterminer à quels instants le mobile a une abscisse positive ou nulle.



Exemple 2 Une entreprise fabrique des lampes solaires. Le bénéfice qu'elle réalise en centaines d'euros, est modélisé par une fonction b dont la représentation graphique est donnée ci-contre, x représentant le nombre de lampes vendues, en centaines.

1. Lire $b(10)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Déterminer le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et les quantités de lampes à fabriquer correspondantes.

3. La fonction b définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est définie par l'expression : $b(x) = -2x^2 + 110x - 1\,200$

a. Montrer que $b(x) = (x-40)(-2x+30)$ **b.** Résoudre $b(x) = 0$.

c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction b et en quel nombre il est atteint.

Exemple 1 1. On calcule $p(0) = 0{,}25 \times 0^2 - 0 - 3 = \mathbf{-3}$
et $p(2) = 0{,}25 \times 2^2 - 2 - 3 = 0{,}25 \times 4 - 5 = 1 - 5 = \mathbf{-4}$

2a. La courbe nous dit que le mobile est à la position -3 en $\boldsymbol{t = 0}$ (ce qui avait été trouvé en question 1) et en $\boldsymbol{t = 4}$.

2b. La vitesse moyenne recherchée correspond au taux d'accroissement de la fonction p entre 6 et 8.

$$\frac{p(8) - p(6)}{8 - 6} = \frac{5 - 0}{2} = \mathbf{2{,}5} \text{ mètres par minute}$$

3a. On développe l'expression proposée par l'énoncé.

$0{,}25(t-6)(t+2)$
$= (0{,}25t - 1{,}5)(t+2)$
$= 0{,}25t \times t + 0{,}25t \times 2 - 1{,}5t - 1{,}5 \times 2$
$= 0{,}25t^2 + 0{,}5t - 1{,}5t - 3$
$= \mathbf{0{,}25t^2 - t - 3}$

On retrouve l'expression de $p(t)$.

3b. On en déduit les **racines de $\boldsymbol{t}$: $\mathbf{-2}$ et 6**.

On établit le tableau de signes (0,25 étant **positif**) :

t	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$p(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, le mobile a une abscisse positive ou nulle **à partir de 6 minutes**.

Exemple 2

1. Sur la courbe, on lit que $b(10) \approx \mathbf{-300}$

Cela signifie que pour 10 centaines, soit **1 000 lampes** vendues, l'entreprise subit environ 300 centaines d'euros de pertes, soit **30 000 € de pertes**.

2. Le maximum de la fonction b semble être environ 320, atteint pour $x \approx 27$.

Il semblerait donc que le bénéfice maximal soit de **32 000 €** pour environ **3 200 lampes**.

3a. On développe l'expression proposée, qui n'est pas tout à fait de la même forme que d'habitude.

$(x-40)(-2x+30)$

$= x \times (-2x) + x \times 30 - 40 \times (-2x) - 40 \times 30$

$= -2x^2 + 30x + 80x - 1\,200$

$= -2x^2 + 110x - 1\,200$

On retrouve bien l'expression de $b(x)$.

3b. L'expression ne permet pas de lire directement les racines, mais il s'agit d'une équation produit nul.

Soit $x - 40 = 0$

$\Leftrightarrow x = \mathbf{40}$

Soit $-2x + 30 = 0$

$\Leftrightarrow -2x = -30$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-30}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \mathbf{15}$

Les racines du polynôme sont donc $x_1 = 40$ et $x_2 = 15$.

3c. Il s'agit de dresser le tableau de variations de b.

L'abscisse du sommet est : $s = \frac{40+15}{2} = \frac{55}{2} = \mathbf{27{,}5}$

et l'ordonnée est $b(27{,}5) = -2 \times 27{,}5^2 + 110 \times 27{,}5 - 1\,200 = \mathbf{312{,}5}$

x	$-\infty$		$27,5$		$+\infty$
b		↗	$312,5$	↘	

Le maximum de la fonction b est 312,5 et il est atteint pour $x = 27{,}5$.

3. Polynômes de degré 3

3a. Polynômes $ax^3 + d$

Un polynôme de degré 3 est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

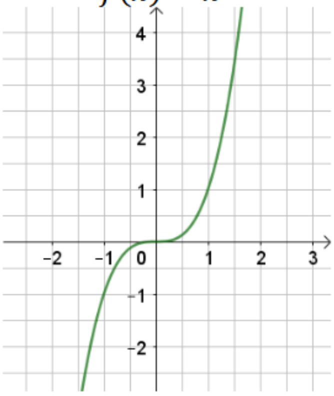
où a, b, c et d sont des réels, et a est non nul.

Exemple 1 On considère le polynôme défini par $f(x) = -2x^3 + 54$.

a. Donner les valeurs de a, b, c et d. **b.** Calculer $f(2)$ et $f(-1)$. **c.** Vérifier que 3 est une racine de f.

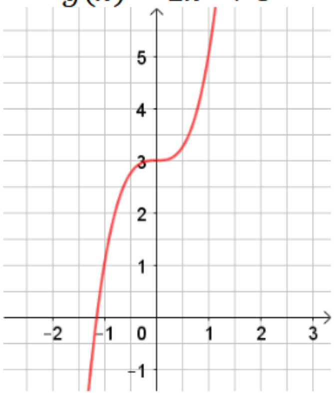
Exemple 2 Dans chaque cas, identifier les valeurs de a et d. Observer le rapport entre a et d, et la courbe.

$f(x) = x^3$



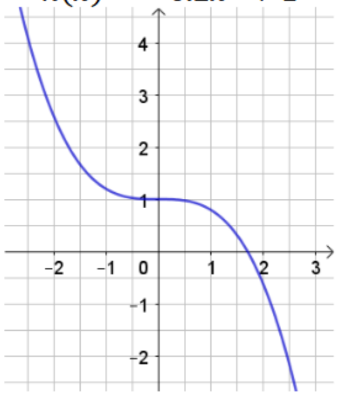
$a =$ et $d =$

$g(x) = 2x^3 + 3$



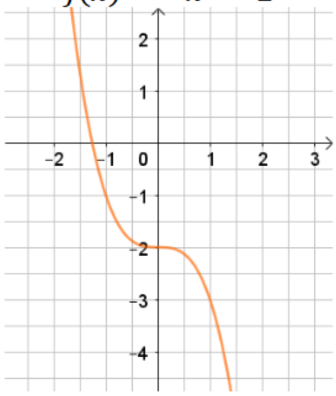
$a =$ et $d =$

$h(x) = -0.2x^3 + 1$



$a =$ et $d =$

$j(x) = -x^3 - 2$



$a =$ et $d =$

Exemple 1

a. On a $\boldsymbol{a = -2}$ et $\boldsymbol{d = 54}$. Il n'y a pas de termes en x^2 ou en x, donc $\boldsymbol{b = c = 0}$.

b. $f(2) = -2 \times 2^3 + 54 = -2 \times 8 + 54 = -16 + 54 = \mathbf{38}$

$f(-1) = -2 \times (-1)^3 + 54 = -2 \times (-1) + 54 = 2 + 54 = \mathbf{56}$

c. $f(3) = -2 \times 3^3 + 54 = -2 \times 27 + 54 = -54 + 54 = \mathbf{0}$

donc 3 est bien une racine de f.

Exemple 2

- pour $f(x) = x^3$: $\boldsymbol{a = 1}$ et $\boldsymbol{d = 0}$
- pour $g(x) = 2x^3 + 3$: $\boldsymbol{a = 2}$ et $\boldsymbol{d = 3}$
- pour $h(x) = -0{,}2x^3 + 1$: $\boldsymbol{a = -0,2}$ et $\boldsymbol{d = 1}$
- pour $j(x) = -x^3 - 2$: $\boldsymbol{a = -1}$ et $\boldsymbol{d = -2}$

3b. Racine cubique

Définition : la racine cubique d'un nombre c est l'unique nombre x tel que $x^3 = c$. On la note $\sqrt[3]{c}$.

Propriété : les polynômes de la forme $ax^3 + d$ admettent exactement une racine.

Exemple 1 Calculer les racines cubiques : $\sqrt[3]{8} =$ $\sqrt[3]{27} =$ $\sqrt[3]{125} =$ $\sqrt[3]{1\,000} =$

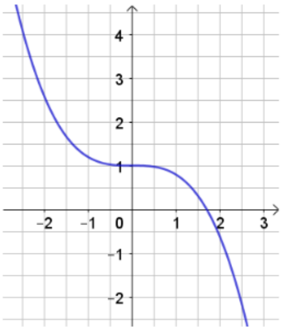
Exemple 2 Donner la valeur exacte ou les valeurs approchées au centième des racines cubiques suivantes :

$\sqrt[3]{2} \approx$ $\sqrt[3]{3} \approx$ $\sqrt[3]{10} \approx$ $\sqrt[3]{25} \approx$

$\sqrt[3]{-8} =$ $\sqrt[3]{-3} \approx$ $\sqrt[3]{-4} \approx$ $\sqrt[3]{-64} =$

Exemple 3 Déterminer la racine du polynôme $f(x) = 3x^3 + 24$

Exemple 4 Déterminer la racine du polynôme $g(x) = -0{,}2x^3 + 1$ représenté ci-contre.



Exemple 1 $\sqrt[3]{8} = 2$, car $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. De la même manière :
$\sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$ $\sqrt[3]{125} = \mathbf{5}$ $\sqrt[3]{1\,000} = \mathbf{10}$

Exemple 2

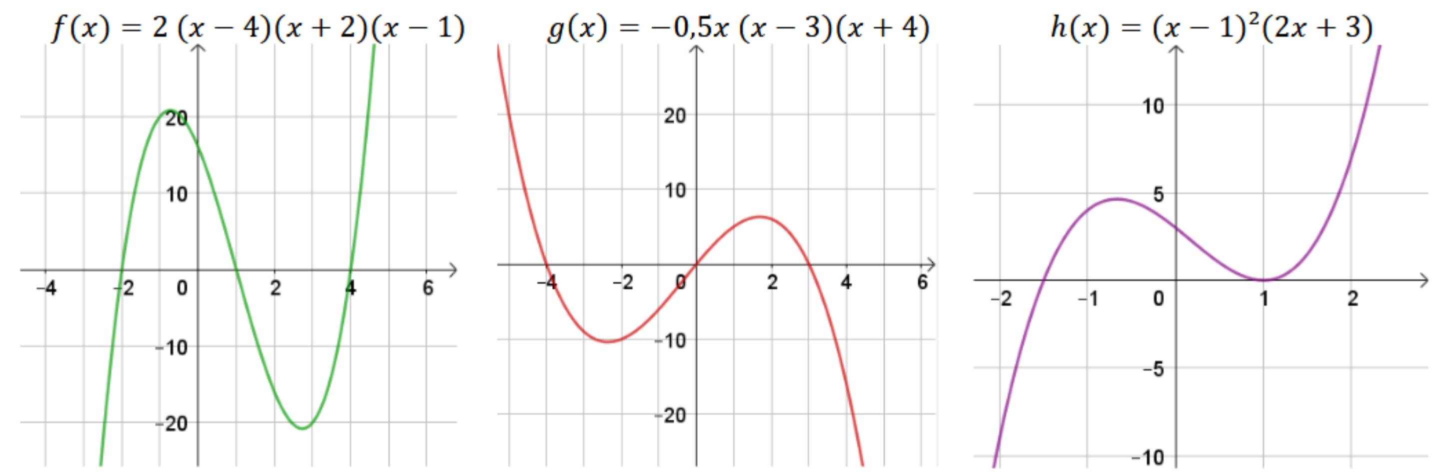
$\sqrt[3]{2} \approx \mathbf{1,26}$ $\sqrt[3]{3} \approx \mathbf{1,44}$ $\sqrt[3]{10} \approx \mathbf{2,15}$ $\sqrt[3]{25} \approx \mathbf{2,92}$
$\sqrt[3]{-8} = \mathbf{-2}$ $\sqrt[3]{-3} \approx \mathbf{-1,44}$ $\sqrt[3]{-4} \approx \mathbf{-1,59}$ $\sqrt[3]{-64} = \mathbf{-4}$

Exemple 3
On résout l'équation :
$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow 3x^3 + 24 = 0$
$\Leftrightarrow 3x^3 = -24$
$\Leftrightarrow x^3 = -\frac{24}{3}$
$\Leftrightarrow x^3 = -8$
$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} = \mathbf{-2}$
La racine de f est donc -2.

Exemple 4
On résout l'équation :
$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow -0{,}2x^3 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow -0{,}2x^3 = -1$
$\Leftrightarrow x^3 = \frac{-1}{-0{,}2}$
$\Leftrightarrow x^3 = 5$
$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5} \approx \mathbf{1,71}$
La racine de f est donc environ 1,71.

3c. Polynômes factorisés

Propriété : Les polynômes de degré 3 admettant pour racines x_1, x_2 et x_3 peuvent se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$



Ici, $a =$, $x_1 =$
$x_2 =$ et $x_3 =$

Ici, $a =$, $x_1 =$
$x_2 =$ et $x_3 =$

Ici, $a =$, $x_1 =$
$x_2 =$ et $x_3 =$

• pour f :	$\boldsymbol{a = 2}$	$\boldsymbol{x_1 = 4}$	$\boldsymbol{x_2 = -2}$	$\boldsymbol{x_3 = 1}$
• pour g :	$\boldsymbol{a = -0,5}$	$\boldsymbol{x_1 = 0}$	$\boldsymbol{x_2 = 3}$	$\boldsymbol{x_3 = -4}$
• pour h :	$\boldsymbol{a = 1}$	$\boldsymbol{x_1 = 1}$	$\boldsymbol{x_2 = 1}$	$\boldsymbol{x_3 = -1,5}$