Correction de l'exemple d'interrogation écrite sur la divisibilité et les congruences

Exercice 1 (4 pts)
a. (2 pts) $x^2 - y^2 = 63 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 63$
On recherche les couples d'entiers naturels $(x;y)$, donc $x + y > x - y$. On peut avoir :
$\begin{cases} x+y=63 \\ x-y=1 \end{cases}$ soit $(32;31)$. $\begin{cases} x+y=21 \\ x-y=3 \end{cases}$ soit $(12;9)$ $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=7 \end{cases}$ soit $(8;1)$
b. (2 pts) $x^2 = 17 + 7xy \Leftrightarrow x^2 - 7xy = 17 \Leftrightarrow x(x-7y) = 17$.
On recherche les couples d'entiers naturels $(x;y)$, donc $x > x - 7y$. On peut avoir :
$\begin{cases} x=17 \\ x-2y=1 \end{cases}$ soit $(17;8)$.

Exercice 2 (2 pts) On cherche n tel que $n = 46q + 7$ et $n = 35q + 29$.
On en déduit que $46q + 7 = 35q + 29$ soit $11q = 22$ et $q = 2$.
Donc $n = 46 \times 2 + 7 = 99$.

Exercice 3 (2 pts) Méthode 1 On sait que $a = 7q + 4$ et $b = 7q' + 6$.
a. $a + b = 7q + 4 + 7q' + 6 = 7(q+q') + 10$, or 10 ne peut pas être un reste dans une division par 7.
Ainsi, $a + b = 7(q+q') + 7 + 3 = 7(q+q'+1) + 3$ et le reste est 3.
b. De même, $a - b = 7q + 4 - 7q' - 6 = 7(q-q') - 2 = 7(q-q') - 2 + 7 - 7 = 7(q-q'-1) + 5$ et le reste est 5.
Méthode 2 (plus facile ?) On sait que $a \equiv 4[7]$ et $b \equiv 6[7]$.
a. Ainsi, $a + b \equiv 4 + 6 \equiv 10 \equiv 3[7]$ et le reste est 3.
b. De même, $a - b \equiv 4 - 6 \equiv -2 \equiv 5[7]$ et le reste est 5.

Exercice 4 1. (3 pts) On remplit le tableau, en constatant que $3^6 \equiv 3^0 \equiv 1[7]$.
On remarque donc que la « boucle » se fait à partir de $n = 6$, ainsi notre tableau comporte 6 colonnes.

$\boldsymbol{n \equiv \ldots [6]}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{3^n \equiv \ldots [7]}$	1	3	2	6	4	5

2. (1 pt) $3^n - 6$ est divisible par 7 $\Leftrightarrow 3^n - 6 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 3^n \equiv 6[7] \Leftrightarrow n \equiv 3[6]$ d'après le tableau.
Les entiers n sont donc tous les entiers de la forme $6k + 3$, pour $k \in \mathbb{N}$.

3. (2 pts) $24^{605} = (3 \times 8)^{605} = 3^{605} \times 8^{605}$.
Or $605 \equiv 5[6]$, donc d'après le tableau, $3^{605} \equiv 5[7]$. De plus, $8 \equiv 1[7]$, donc $8^{605} \equiv 1[7]$.
Ainsi, $24^{605} \equiv 3^{605} \times 8^{605} \equiv 1 \times 5 \equiv 5[7]$.

Exercice 5 a. (1 pt) $a_0 = 0^5 - 0 = 0$, $a_1 = 1^5 - 1 = 0$ et $a_2 = 2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$.
b. (2 pts) On raisonne par disjonction de cas.
- si n est pair, alors n^5 l'est également, donc $n^5 - n$ est pair.
- si n est impair, alors n^5 l'est également, donc $n^5 - n$ est pair (une différence d'impairs est paire).

Exercice 6 (4 pts)
Si $(n+1)$ divise $(3n-4)$, alors il existe k entier relatif tel que $3n-4=k(n+1)$.
On réécrit cette égalité pour avoir une équation diophantienne :
$3n-4=k(n+1)$
$\Leftrightarrow 3n-k(n+1)=4$
$\Leftrightarrow 3n+3-k(n+1)=7$ (on ajoute 3 des deux côtés)
$\Leftrightarrow 3(n+1)-k(n+1)=7$
$\Leftrightarrow (n+1)(3-k)=7$
Il y a deux possibilités :
$\begin{cases} n+1=7 \\ 3-k=1 \end{cases}$ soit $n=6$ (et $k=2$, mais on ne le demande pas)
$\begin{cases} n+1=1 \\ 3-k=7 \end{cases}$ soit $n=0$ (et $k=-4$, ce qui n'est pas contradictoire avec l'énoncé : c'est n qui est naturel)
Les solutions sont donc 6 et 0.

Exercice 7 (3 pts)
On a $31 \equiv 5[13]$, puis $31^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv -1[13]$. Ainsi, $\mathbf{31^{28}} \equiv (31^2)^{14} \equiv (-1)^{14} \equiv \mathbf{1}[13]$.
Ensuite et de même, $5^2 \equiv 25 \equiv -1[13]$, donc $\mathbf{5^{128}} = (5^2)^{64} \equiv (-1)^{64} \equiv \mathbf{1}[13]$.
Par somme, $31^{26} - 5^{128} \equiv 1 - 1 \equiv 0[13]$ et $31^{26} - 5^{128}$ est un multiple de 13.