Correction de l'interrogation écrite sur les nombres complexes et la géométrie

Exercice 1 *(5 pts)*

1. *(1 pt)* On calcule $|z_1| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

On a $\cos(\arg(z_1)) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg(z_1)) < 0$ donc $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}$

(1 pt) Ainsi, $z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2. *(1 pt)* $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$

3. *(1 pt)*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 5e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = 5e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Ainsi, le module de $\frac{z_1}{z_2}$ est 5 et un argument est $\frac{\pi}{12}$.

4. *(0,5 pt + 0,5 pt pour l'argument principal)* On a $\arg({z_1}^{10}) = 10 \times \arg(z_1) = -\frac{10\pi}{4} = -\frac{8\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 *(5 pts)*

1. *(1,5 pts)* Le discriminant de ce polynôme est -3, donc on trouve bien les racines conjuguées

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. *(1 pt)*

$$|j| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

De plus, $\cos(\arg(j)) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\arg(j)) > 0$ donc $\arg(j) = \frac{2\pi}{3}$

(0,5 pt) Ainsi, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. *(1 pt)* $j^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}\times 3} = e^{i2\pi} = 1$ et j est racine du polynôme, donc $j^2 + j + 1 = 0 \Leftrightarrow j^2 = -j - 1$

4. *(1 pt)* On calcule $PQ = |j - 1| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

$PR = |j^2 - 1| = \left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

et $QR = |j^2 - j| = \left|-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

Donc le triangle PQR est équilatéral.