Correction de l'interrogation écrite B sur les nombres complexes

Exercice 1

(1 pt) $A = (5i - 4)(2 + i) = 5i \times 2 + 5i \times i - 4 \times 2 - 4 \times i = 10i - 5 - 8 - 4i = -13 + 6i$

(1 pt) $B = \frac{1-3i}{i} = \frac{-i(1-3i)}{i\times(-i)} = \frac{-i+3i^2}{1} = -3 - i$

Exercice 2 (4 pts)

a. (0,5 pt) $\overline{z_1} = \mathbf{3 + 5}\boldsymbol{i}$

b. (0,5 pt) $Im(z_2) = \mathbf{-1}$

c. (1 pt) $z_1{}^2 = (3 - 5i)^2 = 9 - 30i + 25i^2 = \mathbf{-16 - 30}\boldsymbol{i}$

d. (1 pt) $-iz_2 = -4i + i^2 = \mathbf{-1 - 4}\boldsymbol{i}$

e. (1 pt) $\frac{3-5i}{4-i} = \frac{(3-5i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{12+3i-20i-5i^2}{4^2+1^2} = \frac{17-17i}{17} = 1 - i$

Exercice 3

(2 pts) a. $z(5 + 3i) = 1 + i \Leftrightarrow z = \frac{1+i}{5+3i} = \frac{(1+i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{5-3i+5i-3i^2}{5^2+3^2} = \frac{8+2i}{34} = \frac{4}{17} + i\frac{1}{17}$

(2 pts) b. On pose $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$2z - \bar{z} = 5 + i \Leftrightarrow 2(a + ib) - (a - ib) = 5 + i \Leftrightarrow a + 3ib = 5 + i \Leftrightarrow a = 5 \; et \; b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow z = 5 + \frac{1}{3}i$

Exercice 4

(1 pt) a. $z^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 64, S = \{-8; 8\}$

(1 pt) b. $z^2 + 21 = 8 \Leftrightarrow z^2 = 8 - 21 \Leftrightarrow z^2 = -13,\ S = \{-\sqrt{13}i; \sqrt{13}i\}$

(2 pts) c. $4z^2 - 4z + 5 = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 5 = 16 - 80 = -64$

Les solutions sont $z_1 = \frac{4+8i}{8} = \frac{1}{2} + i$ et $z_2 = \frac{1}{2} - i$

(2 pts) d. $z^2 + z + 1 = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

Les solutions sont $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

(1 pt) e. $3z^2 - 7z = 0 \Leftrightarrow z(3z - 7) = 0, S = \{0; \frac{7}{3}\}$

Exercice 5

(1 pt) a. On remarque que $i^6 = i^2 \times i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

Donc $\frac{3}{4i^6} = \frac{3}{4\times(-1)} = -\frac{3}{4}$

(2 pts) b. Soient x et y ces deux nombres, on a $xy = 50$ soit $y = \frac{50}{x}$.

Or $x + y = 12$, donc $x + \frac{50}{x} = 12$. En multipliant par x non nul, il vient $x^2 + 50 = 12x$ soit $x^2 - 12x + 50 = 0$

Le discriminant de ce polynôme est $(-12)^2 - 4 \times 1 \times 50 = 144 - 200 = -56$

Ainsi, les racines sont :

$$x = \frac{12 + i\sqrt{56}}{2} = 6 + i\sqrt{14} \qquad y = \frac{12 + i\sqrt{56}}{2} = 6 - i\sqrt{14}$$

Ce sont les nombres recherchés, on a bien $x + y = 12$ et $xy = 6^2 + \sqrt{14}^2 = 36 + 14 = 50$

(ce dernier produit est celui d'un nombre et de son conjugué).